

Современные методы анализа и обработки сигналов и изображений

Олег Владимирович Шестаков
кафедра математической статистики
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова



Рекомендуемая литература

1. Захарова Т.В., Шестаков О.В. Теория вейвлетов и ее применение в обработке сигналов. М.: МастерПринт. 2018.
2. Скворцова Н.Н., Шестаков О.В., Малахов Д.В. Методы численного анализа стохастических сигналов. Лекции по курсу «прикладная радиофизика». М.: МИРЭА. 2011.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высш. шк. 1984.
4. Шестаков О.В. Вероятностные модели в томографии. М.: МАКС Пресс. 2008.
5. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М: Мир. 2005.
6. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь. 1989.
7. Boggess A., Narkowich F. A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.



Основные темы курса

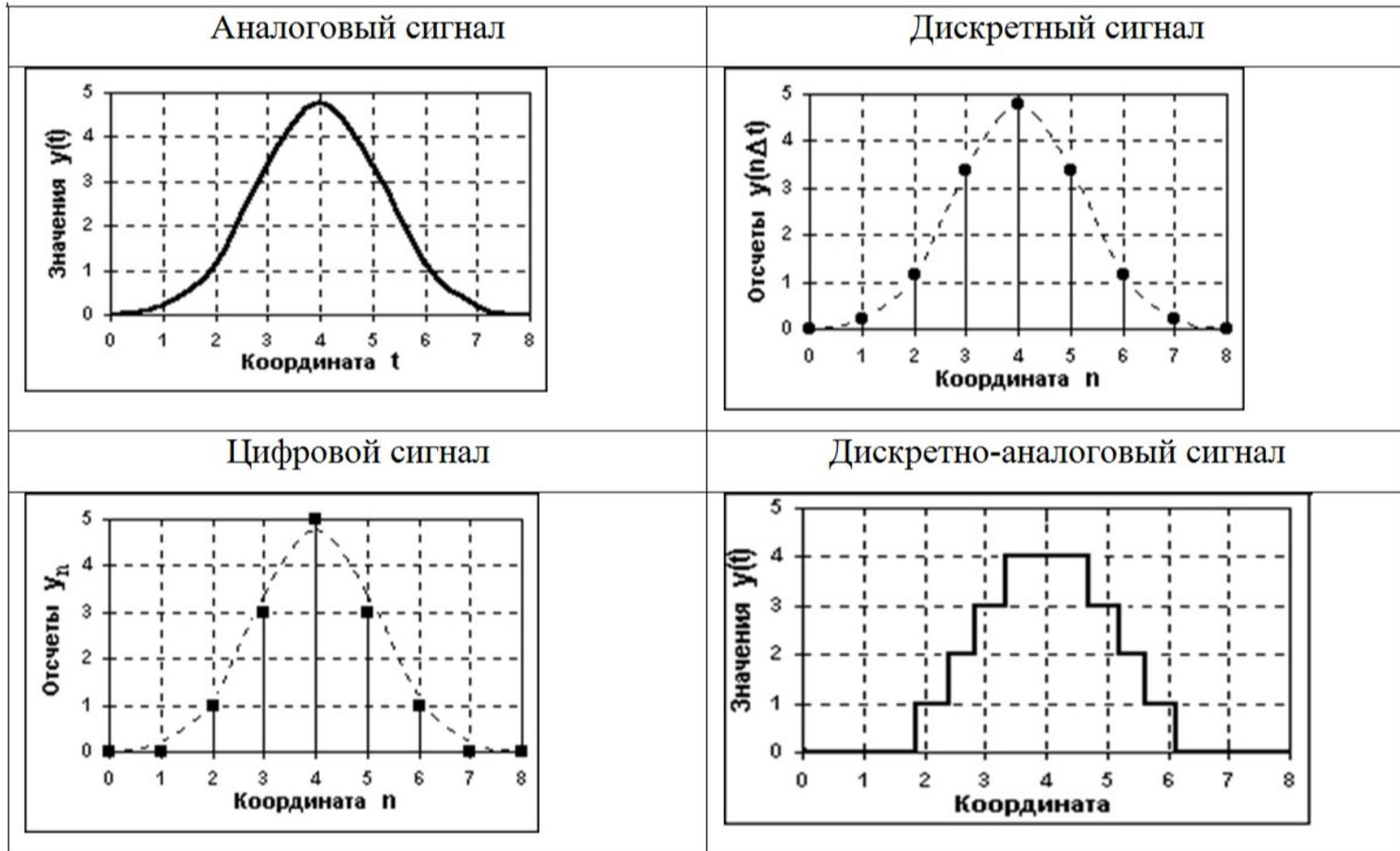
1. Вероятностный анализ больших массивов данных, содержащих выборки сигналов/изображений.
2. Фурье-анализ и его применение для анализа/обработки стационарных сигналов/изображений. Асимптотические свойства методов Фурье-анализа при возрастании объема анализируемых данных.
3. Вейвлет-анализ и его применение для анализа/обработки нестационарных сигналов/изображений. Асимптотические свойства методов вейвлет-анализа при возрастании объема анализируемых данных.
4. Применение методов вейвлет-анализа для решения обратных статистических задач. Методы нелинейной регуляризации и их асимптотические свойства при возрастании объема анализируемых данных.
5. Методы реконструкции томографических изображений. Задачи локальной реконструкции и улучшения качества изображений.



Классификация сигналов



Типы сигналов



Дискретизация - преобразование аналоговых сигналов в дискретные
Аналого-цифровое преобразование (АЦП)
Цифро-аналоговое преобразование (ЦАП)



Контрольные вопросы

1. Чем отличаются случайные помехи от полезных стохастических сигналов?
2. Какие сигналы называют почти периодическими?
3. Какие стохастические сигналы называют стационарными?
4. Чем дискретный сигнал отличается от цифрового?
5. В чем заключается операция аналого-цифрового преобразования?



Корреляционный анализ временных выборок

Ансамбли двух временных выборок:

$\{x_n(t)\}$, $\{y_n(t)\}$ при большом объеме данных n .

В простейшем случае предполагается линейная зависимость в момент t_0 .

$$a: \varepsilon(a, t_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) - a \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k(t_0).$$

$$a(t_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) / \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k(t_0), \quad a(t_0) \rightarrow \frac{\overline{Ex}(t_0)}{\overline{Ey}(t_0)}.$$

Недостаток: часто выборки центрированы и их средние значения равны нулю, тогда $\varepsilon(a, t_0) = 0$ при любом a .



$$z(b, t_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| x_k(t_0) - b \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k(t_0) \right|^2$$

b , при котором достигается минимум: $\frac{\partial z(b, t_0)}{\partial b} = 0$, или

$$b = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) y_k(t_0)}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k(t_0)|^2}$$

При этом

$$\begin{aligned} z_{min} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k(t_0)|^2 \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) y_k(t_0) \right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k(t_0)|^2 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |y_k(t_0)|^2} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k(t_0)|^2 (1 - \rho^2), \end{aligned}$$

ρ – коэффициент корреляции. $z_{min} = 0$ при $\rho = \pm 1$.

$C_{x,y}(t_0, t_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) y_k(t_0)$ – ковариация

$C_{x,y}(t_0, t_0 - \tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) y_k(t_0 - \tau)$ – корреляционная функция



Свойство эргодичности

В физическом эксперименте трудно организовать измерения ансамбля временных реализаций случайного процесса.

Легче осуществить измерения одной реализации большой длины.

Некоторые стационарные случайные процессы обладают свойством т.н. эргодичности,

т.е. усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по реализации.

Эргодичность предполагается, если отсутствуют веские доводы физического характера, препятствующие этому.

Обычно ограничиваются предположением об эргодичности 2-го порядка.



Корреляционная функция эргодических процессов

$$C_{x,y}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t - \tau)dt$$

Автокорреляционная функция (АКФ)

$$C_{x,x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t - \tau)dt$$

Свойства АКФ:

1. четность $C_{x,x}(\tau) = C_{x,x}(-\tau)$
2. $|C_{x,x}(\tau)| \leq C_{x,x}(0)$ – среднее значение мощности $x(t)$
3. $C_{x,x}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$
4. АКФ периодического сигнала является периодической функцией
5. АКФ сохраняет частотную информацию и теряет фазовую информацию



Невозможно измерить бесконечную временную выборку процесса.

Рассмотрим пример гармонического сигнала с частотой ω_0 : $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$.

Его АКФ равна

$$C_{x,x}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2} \left(\cos(\omega_0 \tau) + \frac{\cos(\omega_0 T)}{2\omega_0 T} \sin(\omega_0 \tau) \right)$$

Второе слагаемое стремиться к 0 при $T \rightarrow \infty$.

Оценка АКФ по конечному отрезку времени:

$$C_{x,x}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{-T/2+\tau}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt$$

Оценка АКФ при конечном T близка к точному значению АКФ при $T \gg T_0$, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$ – период сигнала.

Ошибка возрастает при уменьшении T или частоты ω_0 .



Для дискретного временного ряда $\{x_k\}$ при $\Delta t = \text{const}$ АКФ вычисляется для $\Delta \tau = \Delta t$ и записывается как функция номеров n :

$$C_{x,x}(n) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k x_{k+n}$$

Дискретная АКФ имеет такие же свойства, как и непрерывная АКФ.

Для дискретного сигнала конечной длины с номерами отсчетов $k = 0, \dots, N$ вычисление оценки дискретной АКФ выполняется в одностороннем варианте с учетом длины массива по формуле:

$$C_{x,x}(n) = \frac{N\Delta t}{N+1-n} \sum_{k=0}^{N-n} x_k x_{k+n}$$



Как правило, следует придерживаться двух условий:

1. выбирать временной интервал более чем в 5 раз превышающий наибольший период колебаний
2. совмещать данные не более чем на 20% их длины
($\tau < T/5$)

Полезно провести сравнение АКФ временной выборки с δ -функцией. Если сильно отличается, то это указывает на наличие зависимости и/или тренда в выборке.

Можно перейти к анализу приращений $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Эта операция часто убирает тренд и декоррелирует выборку. Если опять сильно отлична от δ -функции, перейти к вторым приращениям и т.д.



Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод поиска линейной зависимости между временными выборками и в чем его основной недостаток?
2. Что такое коэффициент корреляции?
3. Какие случайные процессы называются эргодическими?
4. Дать определения корреляционной и автокорреляционной функции эргодических процессов.
5. Какими основными свойствами обладает автокорреляционная функция эргодического процесса?
6. Означает ли некоррелированность элементов временной выборки их независимость?
7. Какими особенностями обладает оценка автокорреляционной функции, построенная по конечному массиву данных?
8. С какой целью осуществляется переход к приращениям случайного процесса?



Вероятностный анализ временных выборок

Необходимо перейти к независимой и однородной выборке

Объем выборки n должен быть достаточно большим

Для наглядного представления данных часто используются гистограммы

Гистограмма выборки $\{x_k\}$ объема n – столбиковый график

Данные разбиваются на m интервалов одинаковой длины Δ
(m может зависеть от n)

ν_j – число наблюдений, попавших в j -й интервал

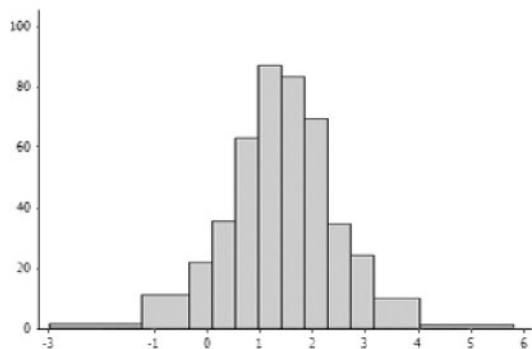
Высота столбика на j -м интервале равна $\frac{\nu_j}{n\Delta}$

Для абсолютно непрерывных распределений гистограмма – оценка плотности

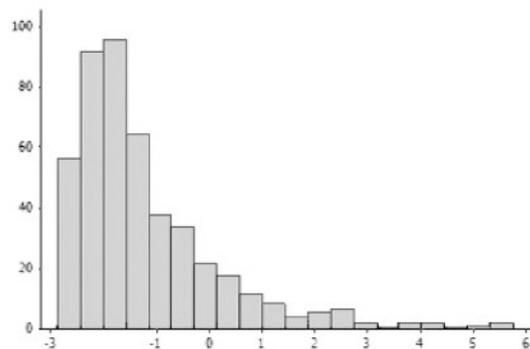
Если плотность непрерывна, то гистограмма поточечно сходится к ней при $m \rightarrow \infty$ и $\frac{m}{n} \rightarrow 0$



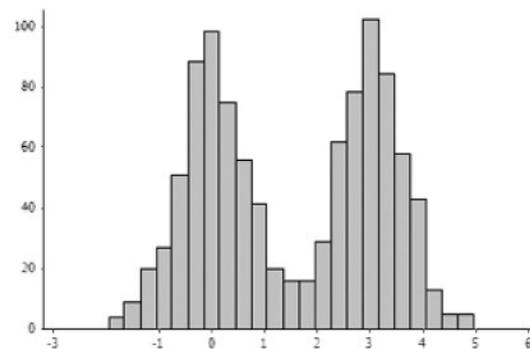
Форма гистограммы дает представление о процессе



а



б



в

- а) симметричная колоколообразная гистограмма
- б) положительно (отрицательно) скошенная гистограмма
- в) бимодальная гистограмма



Моменты распределения также многое говорят о его виде и свойствах

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \text{ – выборочное среднее}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \text{ – выборочная дисперсия}$$

$$\bar{X}^l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^l \text{ – выборочный } l\text{-й момент}$$

$$M_3 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^3 / (S^2)^{3/2} \text{ – выборочный коэффициент асимметрии}$$

$$M_4 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^4 / (S^2)^2 - 3 \text{ – выборочный коэффициент эксцесса}$$

Эти оценки состоятельны.

Оценки \bar{X} и \bar{X}^l также являются несмещенными.

Оценки S^2 , M_3 и M_4 смещены.



Выборочные моменты также часто используются для построения оценок неизвестных параметров распределения временной выборки.

Теоретический момент b_l зависит от параметра θ :

$$b_l = f_l(\theta), \quad l = 1, \dots, k \quad (k - \text{размерность } \theta)$$

Если система разрешима, то $\theta = f^{-1}(b_1, \dots, b_k)$

(f – векторная функция)

$$\text{Оценка: } \hat{\theta} = f^{-1}(\bar{X}, \dots, \bar{X}^k)$$

Если f^{-1} непрерывна, то $\hat{\theta}$ – состоятельная оценка θ .

Может получиться, что значение $\hat{\theta}$ не принадлежит множеству допустимых значений параметра θ . В этом случае в качестве $\hat{\theta}$ берут ближайшую к $f^{-1}(\bar{X}, \dots, \bar{X}^k)$ точку из области допустимых значений θ .



Контрольные вопросы

1. Что оценивает гистограмма?
2. Какой тип гистограммы имеет Гауссово распределение?
3. Какие свойства распределения характеризуют коэффициенты асимметрии и эксцесса?
4. Какими свойствами обладают оценки параметров, полученные методом моментов?
5. Элементы временной выборки имеют равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Используя первые два выборочных момента, построить оценки методом моментов для параметров a и b .



Оценка достоверности моделирования распределения выборки по критерию Хи-квадрат Пирсона

Критерий Хи-квадрат основан на группировке данных. Выборка $\{x_k\}$ из распределения F .

Проверяется гипотеза $H_0 : F = F_0$ против $H_1 : F \neq F_0$.

Область значений F_0 делится на m интервалов.

ν_j – число x_k в j -м интервале.

p_j^0 – теоретическая вероятность попадания в j -й интервал.

$$X^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^0)^2}{np_j^0}$$

Гипотезы H_0 и H_1 сводятся к гипотезам

H'_0 : вероятность попадания в j -й интервал равна p_j^0 для всех $j = 1, \dots, m$.

H'_1 : хотя бы для одного из интервалов эта вероятность отличается от p_j^0 .



Теорема Пирсона.

Если основная гипотеза верна, то при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ ф.р. $F_{X^2}(x) \Rightarrow F_{\chi_{m-1}^2}(x)$.

По ЗБЧ $\frac{\nu_j}{n} \rightarrow p_j$ п.в. $j = 1, \dots, m$.

При больших n X^2 близка к $\sum_{j=1}^m \frac{(np_j - np_j^0)^2}{np_j^0} = n \sum_{j=1}^m \frac{(p_j - p_j^0)^2}{p_j^0}$.

Если H'_0 неверна, то эта величина стремится к ∞ .

H'_0 нужно отвергнуть, если X^2 «слишком велика», т.е. такое значение имеет малую вероятность.

При заданном уровне значимости α если $X^2 > \chi_{1-\alpha, m-1}$ (квантиль порядка $1 - \alpha$ распределения χ_{m-1}^2), то H'_0 отвергается.

Применимость критерия Хи-квадрат: $n \geq 50$, $\nu_j \geq 5$ и $np_j^0 \geq 10$ для всех $j = 1, \dots, m$.



Критерий Хи-квадрат для сложной гипотезы

Проверяется гипотеза $H_0 : F \in \{F_\theta\}$, $\theta \in \Theta \subset R^r$.

В этом случае

$$p_j^0 = p_j^0(\theta) \text{ и } X^2 = X^2(\theta) = \sum_{j=1}^m \frac{(\nu_j - np_j^0(\theta))^2}{np_j^0(\theta)}$$

Вместо θ необходимо использовать оценку $\hat{\theta}$.

$$\hat{\theta} : X^2(\hat{\theta}) = \min_{\theta} X^2(\theta)$$

Тогда по теореме Фишера, если H_0 верна, то при фиксированном m и $n \rightarrow \infty$ ф.р. $F_{X^2(\hat{\theta})}(x) \Rightarrow F_{\chi_{m-r-1}^2}(x)$.

Оценку $\hat{\theta}$, минимизирующую функцию $X^2(\hat{\theta})$, можно также получить, как оценку максимального правдоподобия для θ , построенную по вектору ν_1, \dots, ν_m из полиномиального распределения.



Оценка достоверности моделирования распределения временной выборки по критерию Колмогорова

Проверяется гипотеза $H_0 : F = F_0$ против $H_1 : F \neq F_0$. Критерий Колмогорова применим, если F_0 непрерывна.

$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_k < x)$ или, используя упорядоченную

выборку, $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_{(k)} < x)$.

Вычисляется величина $D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|$.

$F_n(x) \rightarrow F(x)$ п.в. при $n \rightarrow \infty$ при любом x .

Если H_0 верна, то D_n должна быть близка к нулю.

H_0 отвергается, если D_n больше некоторого порога.

Вычисление D_n – более трудоемкая задача, чем вычисление X^2 , но при этом не теряется информация.



Распределение D_n при истинности H_0 не зависит от F_0 .

Пусть $x = F_0^{-1}(u)$, $u \in [0, 1]$.

Тогда $D_n = \sup_{0 \leq u \leq 1} |F_n(F_0^{-1}(u)) - u|$.

Обозначим $u_k = F_0(x_k)$.

F_0 монотонна. Следовательно,

$u_{(k)} = F_0(x_{(k)})$ и $x_{(k)} < F_0^{-1}(u) \Leftrightarrow u_{(k)} < u$.

$$F_n(F_0^{-1}(u)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_{(k)} < F_0^{-1}(u)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(u_{(k)} < u).$$

Если F_0 непрерывна, то $u_k \sim R[0, 1]$. Следовательно,

$$D_n = \sup_{0 \leq u \leq 1} |R_n(u) - u|,$$

$R_n(u)$ – эмпирическая ф.р. для $R[0, 1]$.



По теореме Колмогорова, если верна H_0 , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n < t) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 t^2}, \quad t > 0.$$

При заданном уровне значимости α находится (по таблицам) $t_\alpha : K(t_\alpha) = 1 - \alpha$.

Если $D_n \geq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$, то H_0 отвергается.

Предельную функцию распределения $K(t)$ можно с хорошим приближением использовать для практических расчетов уже при $n \geq 20$.

Для небольших значений n точное распределение D_n также протабулировано.



Для проверки гипотезы о том, что две выборки $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ объема n и m имеют одинаковое распределение, используется критерий Колмогорова-Смирнова.

$$D_{nm} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|,$$

F_{1n} – эмпирическая ф.р. $\{x_k\}$,

F_{2m} – эмпирическая ф.р. $\{y_k\}$.

Если гипотеза верна, то F_{1n} и F_{2m} близки при больших n и m .

По теореме Смирнова, если гипотеза верна, то

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} P \left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} < t \right) = K(t), \quad t > 0.$$

При заданном α , если $D_{nm} \geq t_\alpha \sqrt{\frac{n+m}{nm}}$, то H_0 отвергается.

Критерий не зависит от конкретного вида теоретической функции распределения (если она непрерывна).



Анализ параметра Хёрста для зависимых временных выборок

Если нельзя перейти к независимой выборке, то можно рассмотреть модели, основанные на самоподобных процессах.

В таких моделях дисперсия \bar{x} убывает со скоростью $n^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$ (для независимых выборок $\alpha = 1$).

$H = 1 - \frac{\alpha}{2}$ – параметр Хёрста, $H \in (0, 1)$.

$H = \frac{1}{2}$ – независимая выборка, $H > \frac{1}{2}$ – положительные корреляции, $H < \frac{1}{2}$ – отрицательные корреляции.

Ряд из корреляций расходится – долгосрочная зависимость.

Метод R/S -анализа. Для выборки $\{x_k\}$ процесса на временном интервале $[t_0, t_0 + t]$ вычисляется

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max(0, Z_1, \dots, Z_n) - \min(0, Z_1, \dots, Z_n)}{\sqrt{S^2}},$$

S^2 – выборочная дисперсия, $Z_k = \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})$.

Точки $\left(\log n, \frac{R(n)}{S(n)}\right)$ концентрируются вокруг прямой с наклоном H .

Для определения H применяется метод наименьших квадратов.



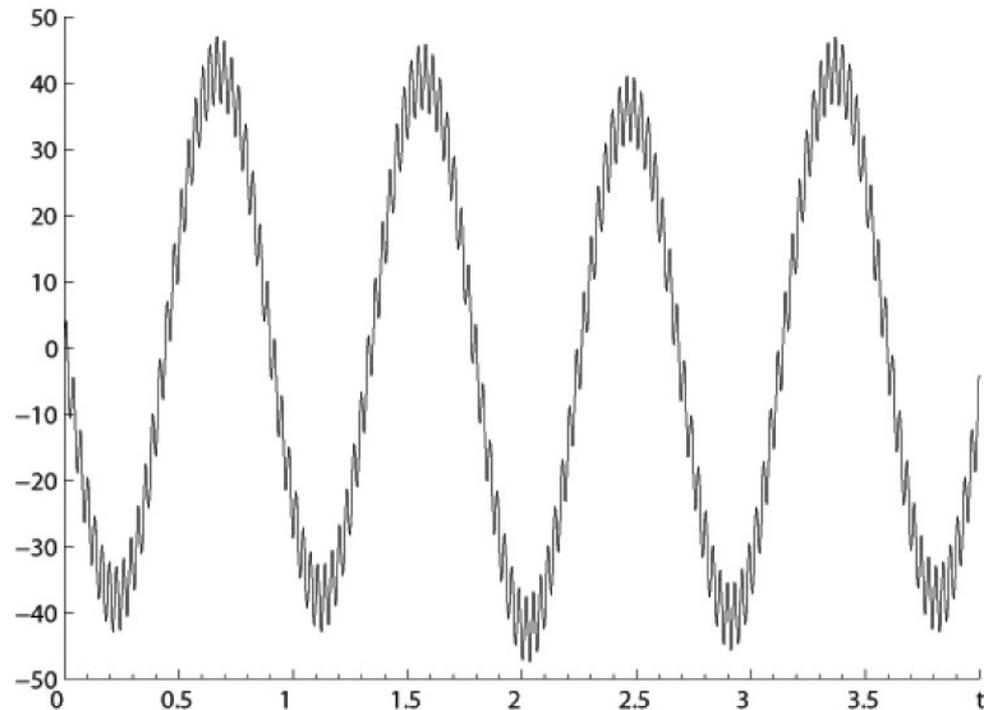
Контрольные вопросы

1. Как происходит группировка данных при использовании критерия хи-квадрат?
2. Какое распределение является предельным в теореме Пирсона?
3. Как вычисляется оценка неизвестного параметра при использовании критерия хи-квадрат для проверки сложной гипотезы?
4. Определение эмпирической функции распределения.
5. Формулировка теоремы Колмогорова.
6. Какая гипотеза проверяется с помощью критерия Колмогорова-Смирнова?
7. Как вычисляется отношение R/S при анализе параметра Хёрста?
8. В случайном сигнале может передаваться один из трех символов: a , b , c . Переданный сигнал содержит 4000 отсчетов, среди которых 1905 раз встречается символ a , 1015 раз символ b и 1080 раз символ c . При уровне значимости 0.05 проверить гипотезу о том, что вероятность появления a равна 0.5, а вероятности появления b и c равны 0.25.



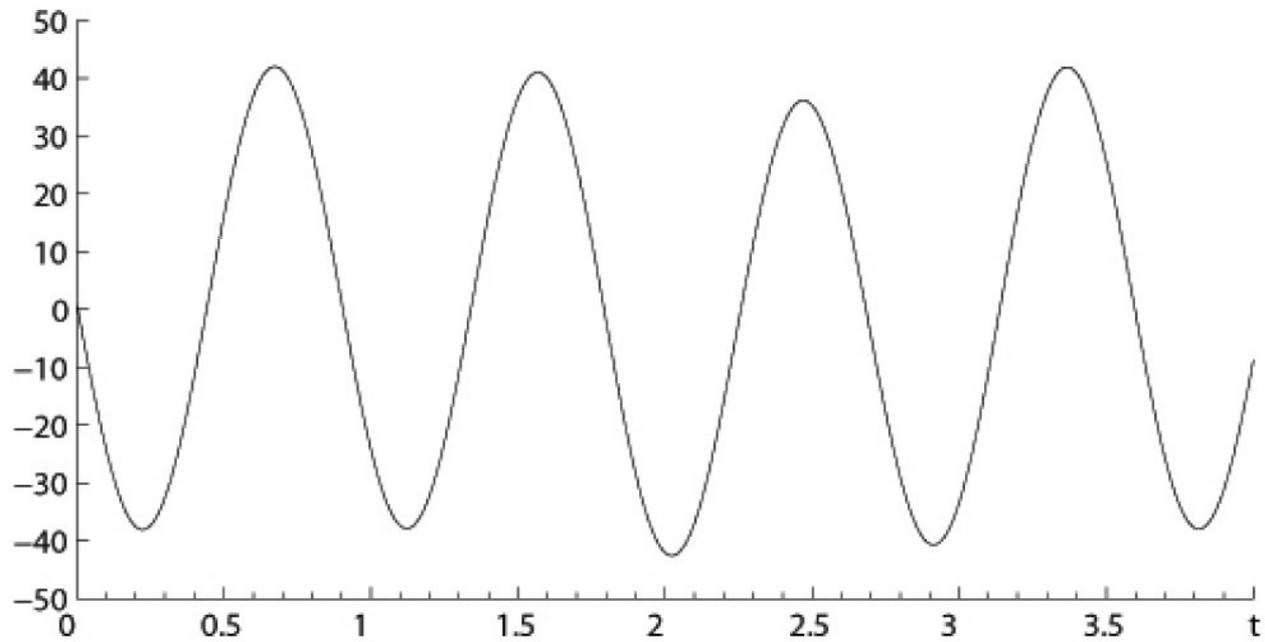
Ряды Фурье

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi].$$



$$f(x) = 3 \sin 2x + \cos 4x - 40 \sin 7x + 5 \sin 200x.$$





$$f^*(x) = 3 \sin 2x + \cos 4x - 40 \sin 7x.$$



Скалярным произведением $\langle f, g \rangle$ функций f и g из пространства $L^2([a, b])$ называется

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Норма $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Функции f и g ортогональны, если $\langle f, g \rangle = 0$.

Рассмотрим отрезок $[-\pi, \pi]$. Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

ортонормирована в $L^2([-\pi, \pi])$.



$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k \geq 1 \\ 2, & \text{если } n = k = 0 \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k \geq 1 \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0 \quad \text{для всех целых } n, k.$$

Рассмотрим тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

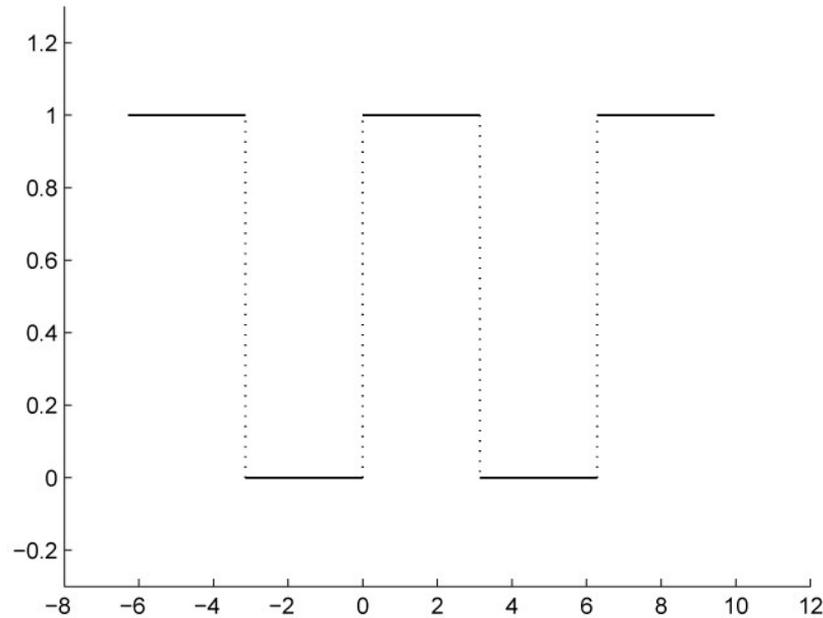
В силу ортонормированности

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$



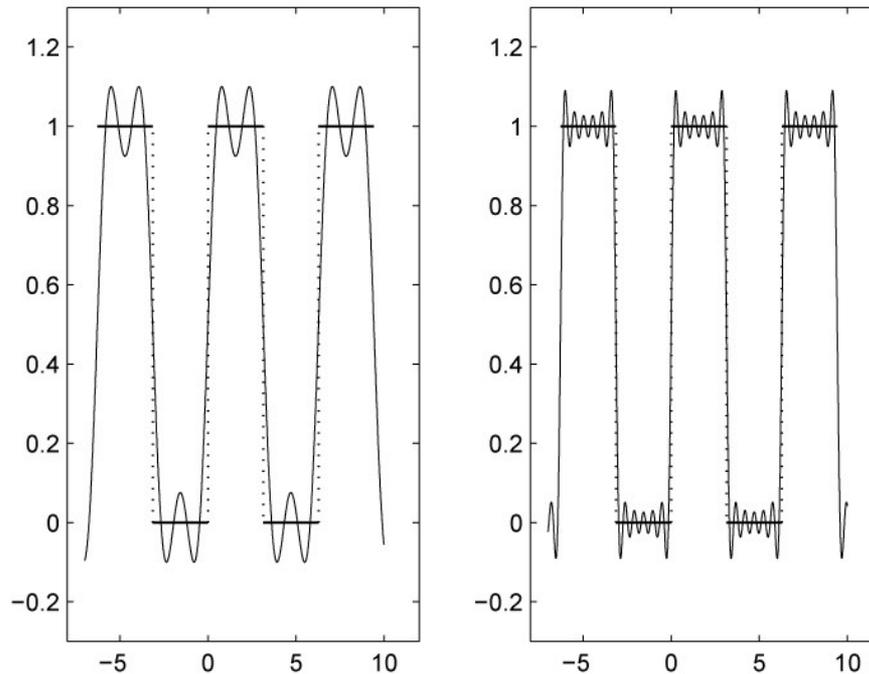
Пример: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$



Разложение f в ряд Фурье: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin kx.$



Аппроксимация функции f частичными суммами f_n ряда Фурье при $n = 3$ и $n = 11$. $f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{\pi k} \sin kx$.



Эффект Гиббса – всплески в точках разрыва.



Перейдем к другим интервалам.

Лемма. Пусть $F(x)$ – некоторая 2π -периодическая функция и c – любое вещественное число, тогда

$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$

Рассмотрим отрезок $[-a, a]$.

Функции $\cos(n\pi x/a)$ и $\sin(n\pi x/a)$ периодичны с периодом $2a$ и

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x/a) + b_k \sin(k\pi x/a)),$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos(n\pi x/a) dx, \quad b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin(n\pi x/a) dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx.$$



Если $f(x)$ четная, то

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x/a),$$

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(k\pi x/a) dx.$$

Если $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x/a),$$

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(k\pi x/a) dx.$$

Если $f(x)$ определена на $[0, a]$, ее можно продолжить на $[-a, 0]$ четным или нечетным образом.



Комплексная форма ряда Фурье

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}, \quad |e^{ix}| = 1, \quad \overline{e^{ix}} = e^{-ix},$$

$$e^{ix} e^{is} = e^{i(x+s)}, \quad e^{ix} / e^{is} = e^{i(x-s)}, \quad \frac{d}{dx}(e^{ix}) = ie^{ix}.$$

Последовательность функций

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

является ортонормированной в пространстве $L^2([-\pi, \pi])$.
Для разложимой в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Связь между вещественной и комплексной формами рядов Фурье

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha_n e^{inx}$$

Для вещественной функции $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$. Следовательно,

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{inx} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}.$$

Так как для комплексного числа $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$,

$$f(x) = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \right).$$

Далее

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{2} (a_n - ib_n).$$



$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \right) = \\
&= a_0 + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)(\cos nx + i \sin nx) \right) = \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).
\end{aligned}$$

Можно обратить цепочку и получить комплексную форму.

Комплексная форма более естественна.

Разложение по волнам одной частоты. В каждой волне

$|\alpha_n|$ – амплитуда,

$\arg(\alpha_n)$ – фаза (сдвиг относительно начала координат).



Рассмотрим теперь отрезок $[-a, a]$.

Последовательность функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{in\pi x}{a}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

является ортонормированной в пространстве $L^2([-a, a])$.

Для разложимой в ряд Фурье на отрезке $[-a, a]$ функции

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\frac{in\pi x}{a}}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-\frac{in\pi x}{a}} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Контрольные вопросы

1. Какие задачи обработки и анализа сигналов решают методами Фурье-анализа?
2. Каким образом можно удалить из сигнала высокочастотный шум?
3. Дать определение скалярного произведения квадратично интегрируемых функций.
4. Доказать ортонормированность системы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

5. В чем заключается эффект Гиббса?
6. Доказать, что если $F(x)$ – 2π -периодическая функция и c – любое вещественное число, тогда
$$\int_{-\pi+c}^{\pi+c} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx.$$
7. Доказать ортонормированность системы

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

8. Как определяются амплитуды и фазы гармоник, входящих в разложение Фурье?



Сходимость рядов Фурье

Лемма Римана-Лебега Если f кусочно-непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx dx = 0.$$

Этот факт лежит в основе метода сжатия данных.

Теорема 1. Пусть f – непрерывная 2π -периодическая функция, тогда в каждой точке x , в которой определена производная f , ряд Фурье функции f сходится к $f(x)$.

Теорема 2. Пусть f – кусочно-непрерывная 2π -периодическая функция. Предположим, что в точке x существует конечное левое и правое предельное значение производной функции f , тогда ряд Фурье функции f в точке x сходится к $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.



Равномерная сходимость рядов Фурье

Определение. Последовательность функций $F_n(x)$ сходится равномерно к $F(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ (которое не зависит от x) такое, что при $n \geq N$ $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$.

Определение. Ряд Фурье функции f сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, если последовательность частичных сумм $S_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ сходится равномерно к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Определение. Функция называется кусочно-гладкой, если она непрерывна и ее производная существует всюду, за исключением, быть может, конечного или счетного числа точек.

Теорема 3. Ряд Фурье кусочно-гладкой 2π -периодической функции f равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.



Сходимость рядов Фурье в среднем

$L^2([-\pi, \pi])$ состоит из функций $f: \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

Норма $\|f\|$ в этом пространстве: $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$.

$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ – неравенство Коши-Буняковского

$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ – неравенство треугольника

Лемма Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$, a_k и b_k – коэффициенты Фурье функции f и

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Пусть V_N – линейная оболочка, натянутая на систему $\{1, \cos kx, \sin kx, 1 \leq k \leq N\}$.

Тогда $\|f - f_N\| = \min_{g \in V_N} \|f - g\|$.



Теорема 4. Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$, a_k и b_k – коэффициенты Фурье функции f и

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

тогда $\|f_N - f\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Теорема 4'. Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$, α_n – коэффициенты комплексной формы ряда Фурье функции f и

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx}.$$

тогда $\|f_N - f\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.



Следствие этих теорем – равенство Парсевала.

Теорема 5.

Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$ и $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$,

тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Теорема 5'.

Пусть $f \in L^2([-\pi, \pi])$ и $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}$, тогда

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2.$$

Кроме того, $\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$, где

α_n – коэффициенты f , β_n – коэффициенты g .

Следствием теоремы 5' является неравенство Бесселя:

Для любого натурального N : $\sum_{k=-N}^N |\alpha_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|^2$.



Контрольные вопросы

1. Сформулировать лемму Римана Лебега.
2. Дать определение равномерной сходимости ряда Фурье.
3. Дать определения скалярного произведения и нормы в пространстве квадратично интегрируемых функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.
4. Что означает сходимость в среднем частичных сумм ряда Фурье?
5. Каков физический смысл равенства Парсеваля?



Преобразование Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{ik\pi x}{a}}, \quad x \in [-a, a], \quad \alpha_k = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{a}} dt.$$

Пусть $a \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) e^{-\frac{ik\pi t}{a}} dt \right) e^{\frac{ik\pi x}{a}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) e^{\frac{ik\pi(x-t)}{a}} dt \right). \end{aligned}$$

Обозначим $\omega_k = \frac{k\pi}{a}$, $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{a}$, $\Delta\omega \rightarrow 0$.

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f(t) e^{i\omega_k(x-t)} dt \right) \Delta\omega.$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$



Теорема 1. Если f непрерывно дифференцируемая функция и $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \text{ где } \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

ω играет роль частоты ($\omega_k = \frac{k\pi}{a}$),

$\hat{f}(\omega)$ имеет смысл, аналогичный α_k в ряде Фурье.

$|\hat{f}(\omega)|$ – амплитуда соответствующая ω , $\arg \hat{f}(\omega)$ – фаза.

У рядов Фурье и преобразований Фурье разные области определения.

Ряд Фурье для f на конечном отрезке – дискретный спектр сигнала.

Преобразование Фурье для f на R – непрерывный спектр сигнала.



Свойства преобразования Фурье

Введем обозначение оператора Фурье \mathcal{F} : $\mathcal{F}[f](\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Аналогично вводится обратный оператор \mathcal{F}^{-1} : $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$.

Теорема 2. Пусть f и g – дифференцируемые функции вещественной переменной и $f(x) = 0$ при $|x| > M$, тогда \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} обладают следующими свойствами:

1. $\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$.

$$\mathcal{F}^{-1}[f + g] = \mathcal{F}^{-1}[f] + \mathcal{F}^{-1}[g], \quad \mathcal{F}^{-1}[cf] = c\mathcal{F}^{-1}[f].$$

2. $\mathcal{F}[x^n f(x)](\omega) = i^n \frac{\partial^n}{\partial \omega^n} \{ \mathcal{F}[f](\omega) \}$.

$$\mathcal{F}^{-1}[\omega^n f(\omega)](x) = (-i)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \{ \mathcal{F}^{-1}[f](x) \}.$$

3. $\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega)$, $\mathcal{F}^{-1}[f^{(n)}](x) = (-ix)^n \mathcal{F}^{-1}[f](x)$.

4. $\mathcal{F}[f(x - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$.

5. $\mathcal{F}[f(bx)](\omega) = \frac{1}{|b|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{b}\right)$.



Определение. Пусть f и g – интегрируемые функции, тогда их сверткой называется

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Теорема 3. Пусть f и g – интегрируемые функции, тогда $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}$, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} \cdot \hat{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$.

Теорема 4. Пусть f и g – квадратично интегрируемые функции, тогда $\langle \mathcal{F}[f], g \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle$.

Теорема 5. (формула Планшереля) Пусть f и g – квадратично интегрируемые функции, тогда

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \mathcal{F}^{-1}[g] \rangle = \langle f, g \rangle.$$

В частности, $\|\mathcal{F}[f]\| = \|f\|$ (равенство Парсеваля).

Энергия сигнала во временной области $\|f\|^2$ равна энергии сигнала в частотной $\|\hat{f}\|^2$.



Определение преобразования Фурье для $f \in L^2(\mathbb{R})$

\mathcal{F} – ограниченный линейный оператор.

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ плотно в $L^2(\mathbb{R})$. Равенство Парсеваля, справедливое для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$, распространяет преобразование Фурье на $L^2(\mathbb{R})$ с сохранением нормы.

Пусть $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

$\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

По равенству Парсеваля $\|f_n - f_m\| = \|\widehat{f}_n - \widehat{f}_m\|$.

Поскольку пространство $L^2(\mathbb{R})$ полное,

существует $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - \widehat{f}\| = 0$.

По определению полагаем \widehat{f} преобразованием Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ (f может не принадлежать $L^1(\mathbb{R})$).



Многомерное преобразования Фурье

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), (\omega, x) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i.$$

Преобразование фурье:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} f(x) e^{-i(\omega, x)} dx,$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{R^n} \widehat{f}(\omega) e^{i(\omega, x)} d\omega.$$

Свойства (приведем для функций 2-х переменных:

- $\mathcal{F}[af + bg](\omega_1, \omega_2) = a\mathcal{F}[f](\omega_1, \omega_2) + b\mathcal{F}[g](\omega_1, \omega_2),$
 $\mathcal{F}^{-1}[af + bg](x_1, x_2) = a\mathcal{F}^{-1}[f](x_1, x_2) + b\mathcal{F}^{-1}[g](x_1, x_2).$
- $\mathcal{F}[x_1^{n_1} x_2^{n_2} f(x_1, x_2)](\omega_1, \omega_2) = i^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial \omega_1^{n_1} \partial \omega_2^{n_2}} \{ \mathcal{F}[f](\omega_1, \omega_2) \},$
 $\mathcal{F}^{-1}[\omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} g(\omega_1, \omega_2)](x_1, x_2) = (-i)^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \{ \mathcal{F}^{-1}[g](x_1, x_2) \}.$
- $\mathcal{F} \left[\frac{\partial^{n_1+n_2} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \right] (\omega_1, \omega_2) = i^{n_1+n_2} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2} \mathcal{F}[f](\omega_1, \omega_2),$
 $\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\partial^{n_1+n_2} g(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^{n_1} \partial \omega_2^{n_2}} \right] (x_1, x_2) = (-i)^{n_1+n_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \mathcal{F}^{-1}[g](x_1, x_2).$



4. $\mathcal{F}[f(x - a)](\omega_1, \omega_2) = e^{-i(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2)} \mathcal{F}[f](\omega_1, \omega_2).$

5. $\mathcal{F}[f(b_1 x_1, b_2 x_2)](\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{|b_1 b_2|} \mathcal{F}[f] \left(\frac{\omega_1}{b_1}, \frac{\omega_2}{b_2} \right).$

6. Для свертки $f * g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, u_2) g(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2,$
 $\mathcal{F}[f * g](\omega_1, \omega_2) = 2\pi \hat{f}(\omega_1, \omega_2) \hat{g}(\omega_1, \omega_2).$

7. Формула Планшереля: $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$

Равенство Парсеваля: $\|f\| = \|\hat{f}\|.$

8. Пусть $f_\theta(x_1, x_2) = f(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta),$ тогда
 $\hat{f}_\theta(\omega_1, \omega_2) = \hat{f}(\omega_1 \cos \theta - \omega_2 \sin \theta, \omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta).$



Контрольные вопросы

1. Для каких функций преобразование Фурье определяется в виде интеграла Фурье?
2. Какой физический смысл имеют ω и $\hat{f}(\omega)$?
3. Доказать, что оператор преобразования Фурье является линейным.
4. Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2}$.
5. Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & \text{если } -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

6. Как определяется преобразование Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$?
7. Дать определение интеграла Фурье в многомерном случае.
8. Доказать свойство масштабирования преобразования Фурье в двумерном случае.



Линейные фильтры

Фильтр – это преобразование $L : f \rightarrow \tilde{f}$.

Фильтр L называется линейным, если:

$$L[f + g] = L[f] + L[g], \quad L[cf] = cL[f].$$

Определение. Пусть $f_a(t) = f(t - a)$ (задержка сигнала на a единиц времени). Фильтр L называется инвариантным по времени, если для любого сигнала f и для любого вещественного числа a , $L[f_a](t) = (Lf)(t - a)$ для всех t (или $L[f_a] = (Lf)_a$).

Лемма. Пусть L – линейный фильтр, инвариантный по времени, и ω – некоторое вещественное число. Тогда для L найдется такая функция $h(t)$, что $L(e^{i\omega t}) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t}$.

Теорема. Пусть L – инвариантный по времени линейный фильтр на пространстве сигналов f , которые являются кусочно-непрерывными функциями. Тогда существует интегрируемая функция h такая, что для любого сигнала f : $L(f) = f * h$.

h – импульсный отклик, \hat{h} – системная функция.



Дискретное преобразование Фурье

S_n множество n -периодических последовательностей $\{y\}$:
 $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $y_{k+n} = y_k$ для любого целого числа k .

Определение. Пусть $y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in S_n$. Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) последовательности y называется последовательность $\{\hat{y}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-2\pi i k j / n}.$$

Применение этой формулы требует $O(n^2)$ умножений.



Быстрое преобразование Фурье

Этот расчет может быть сделан за $O(n \log_2 n)$ операций с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Рассмотрим БПФ в случае, когда n является степенью 2.

Введем множители $W_n^j = e^{-2\pi i j/n}$.

Тогда формулу ДПФ можно переписать в виде

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} y_j W_n^{kj}.$$

Разобьем $\{y\}$ на две подпоследовательности:

$$y_k^e = y_{2k}, \quad k = 0, 1, \dots, n/2 - 1,$$

$$y_k^o = y_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n/2 - 1.$$

Тогда

$$\hat{y}_k = \hat{y}_k^e + W_n^k \hat{y}_k^o,$$

$$\hat{y}_{n/2+k} = \hat{y}_k^e - W_n^k \hat{y}_k^o,$$

при $k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$.



На этом шаге требуется $n/2$ умножений. Применим эту схему к $n/2$ -периодическим последовательностям $\{y^e\}$ и $\{y^o\}$ для расчета ДПФ $\{\hat{y}^e\}$ и $\{\hat{y}^o\}$.

Число умножений для них также сократится вдвое, т.е. для каждой последовательности будет произведено $n/4$ умножений, что в сумме даст $n/2$ умножений.

Продолжая, будем увеличивать число последовательностей вдвое и сокращать число умножений вдвое.

Так как n является степенью 2, то максимальное число делений последовательностей на 2 равно $\log_2 n$, при котором будут получены одноточечные последовательности.

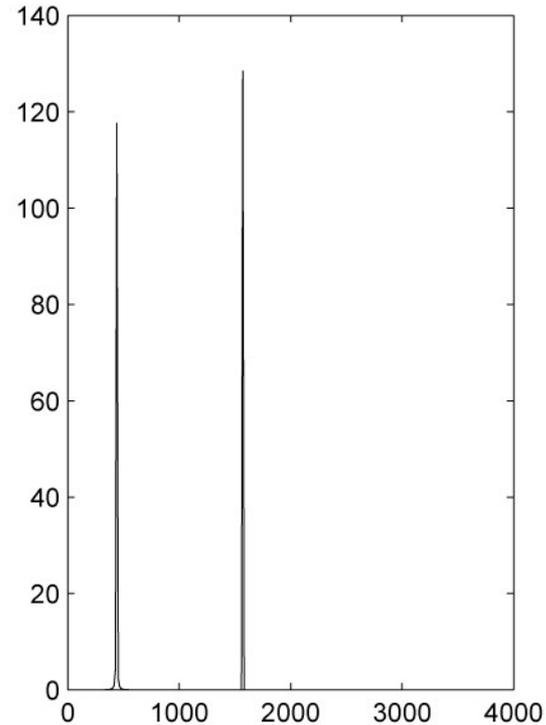
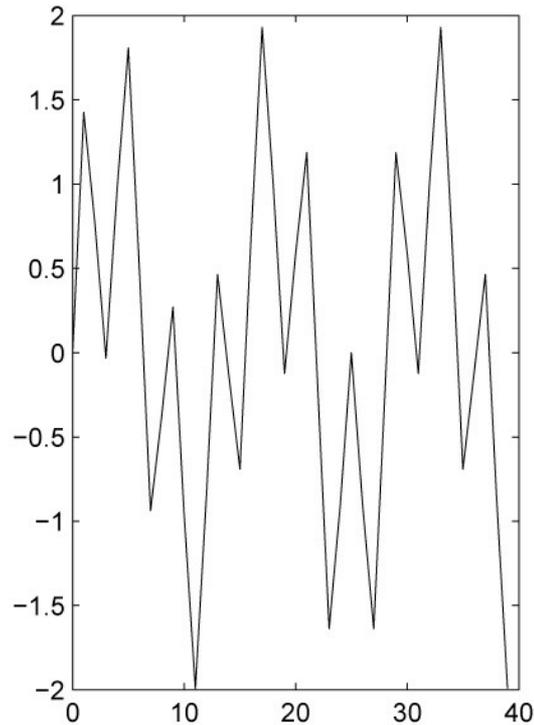
Общее число умножений алгоритма БПФ равно $\frac{n}{2} \log_2 n$, что при больших n значительно меньше n^2 .

У этого алгоритма существуют обобщения на случай, когда n не является степенью 2.



Пример 1.

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 70t) + \sin(2\pi \cdot 250t).$$

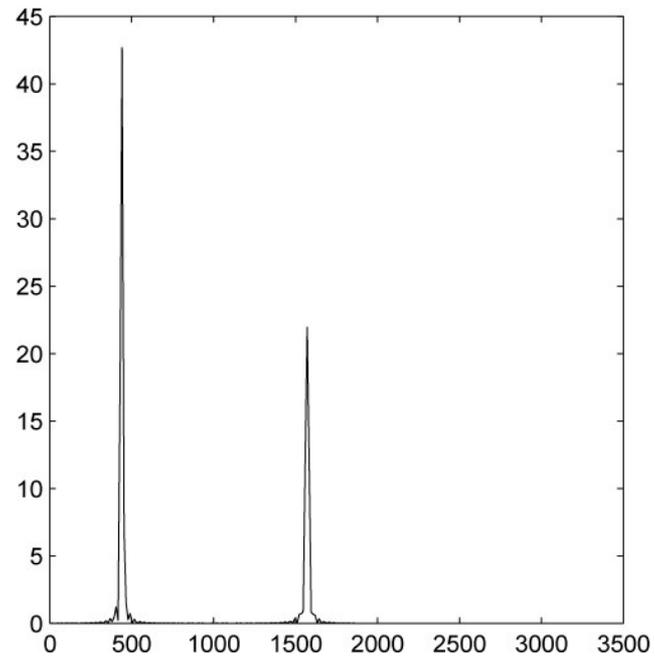
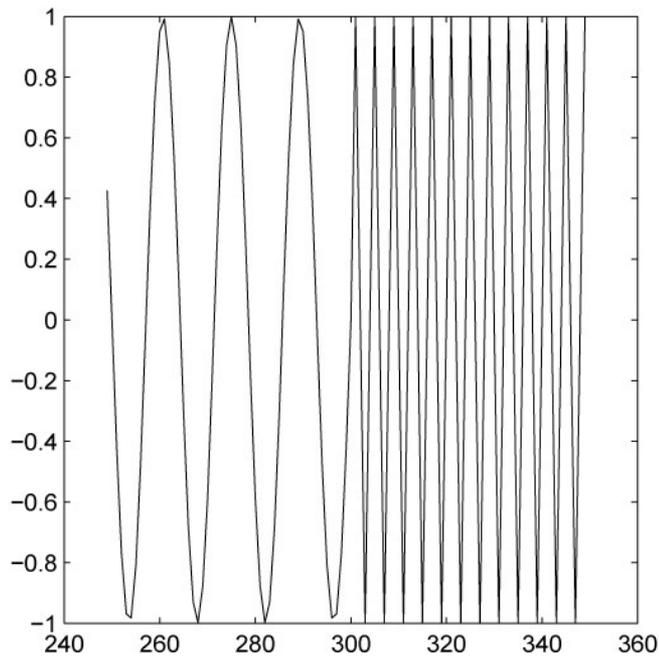


$f(t)$ и ее дискретное преобразование Фурье.



Пример 2.

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot 70t), & \text{при } t \leq 0,3, \\ \sin(2\pi \cdot 250t), & \text{при } t > 0,3. \end{cases}$$



$f(t)$ и ее дискретное преобразование Фурье.



Принцип неопределенности Гейзенберга

$$x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}.$$

Величины x_0 и ω_0 – взвешенные средние значения f и \hat{f} соответственно. Говорят, что сигнал f сконцентрирован вокруг точки (x_0, ω_0) в частотно-временной плоскости.

$$\Delta_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2|f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \quad \text{и} \quad \Delta_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_0)^2|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega}.$$

Δ_x и Δ_ω являются мерами разброса функции f и ее преобразования Фурье \hat{f} относительно центра (x_0, ω_0) . Принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что $\Delta_x^2 \Delta_\omega^2 \geq 1/4$. Функция Гаусса – единственная функция, для которой в этом неравенстве выполняется равенство.



Оконное преобразование Фурье

Пусть функция g является вещественной, четной и $\|g\| = 1$.

Определение. Пусть функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, ее оконным преобразованием Фурье называется

$$Sf(u, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-u)e^{-i\omega t} dt.$$

Спектрограммой называется функция

$$|Sf(u, \omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-u)e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

Спектрограмма измеряет энергию сигнала f в частотно-временной окрестности точки (u, ω) , называемой прямоугольником Гейзенберга.

Теорема. Если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Sf(u, \omega)g(t-u)e^{i\omega t} d\omega du$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Sf(u, \omega)|^2 d\omega du.$$

Одним из примеров оконного преобразования Фурье является преобразование Габора, в котором роль окна играет функция Гаусса.



Контрольные вопросы

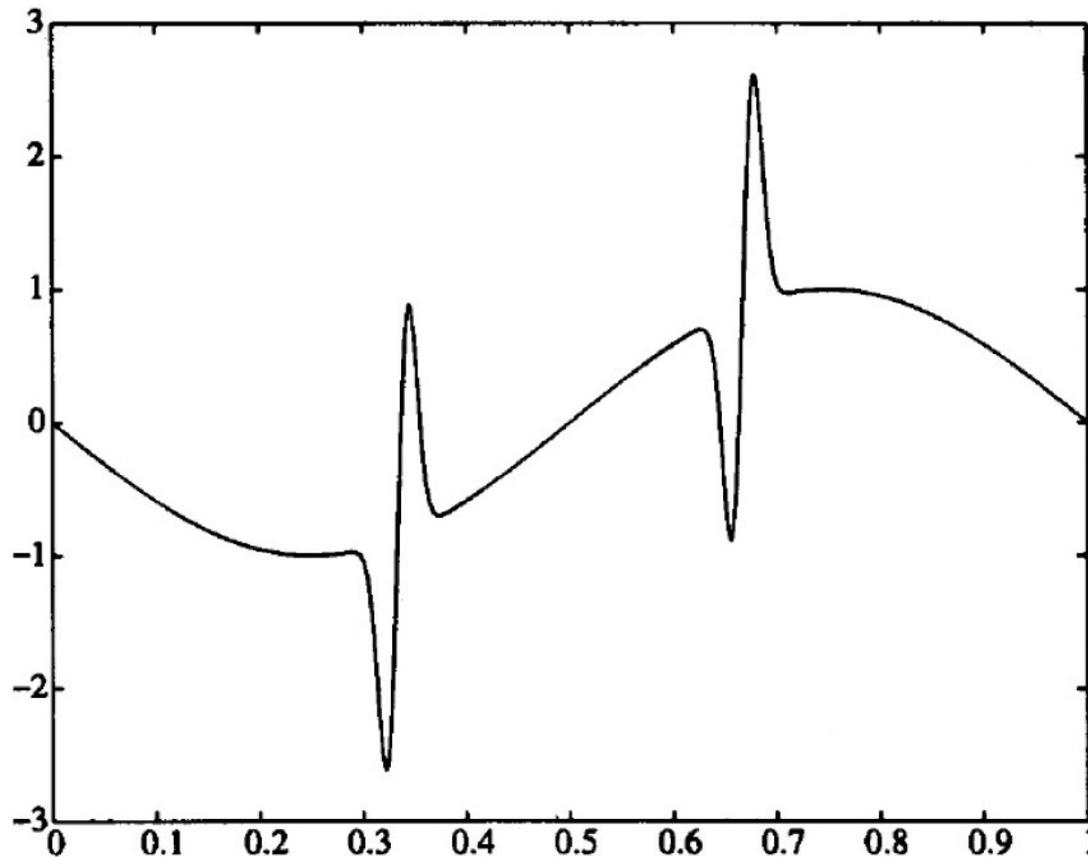
1. Привести пример линейного инвариантного по времени фильтра.
2. Привести пример линейного фильтра, который не является инвариантным по времени.
3. Какие функции являются собственными для линейных инвариантных по времени фильтров?
4. Какая последовательность называется n -периодической?
5. Какова вычислительная сложность прямого расчета дискретного преобразования Фурье?
6. Какова вычислительная сложность алгоритма быстрого преобразования Фурье?
7. Что утверждает принцип неопределенности Гейзенберга?
8. Дать определение оконного преобразования Фурье.
9. Каким образом оконное преобразование Фурье позволяет частично решить проблему частотно-временной локализации сигнала?



Вейвлет-анализ

Фурье-анализ дает информацию только о частотном спектре сигнала. Оконное преобразование Фурье использует временные интервалы одинаковой длины для разных частот.

Вейвлеты приближают «изображение» сигнала для обнаружения коротких волн и отдаляют для анализа длинных колебаний.

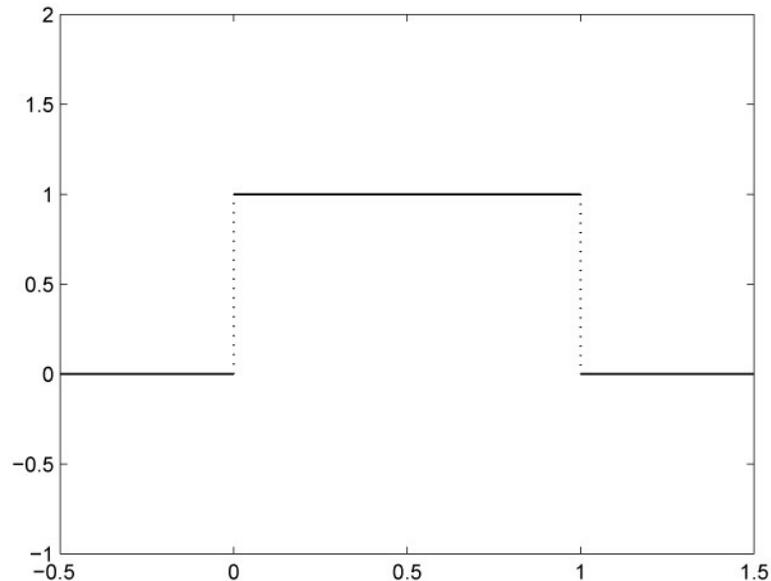


Вейвлеты Хаара

Масштабирующая функция ϕ и вейлет-функция ψ генерируют базисы, которые используются для разложения и реконструкции сигнала.

Пример – масштабирующая функция Хаара:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



V_0 – пространство всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_{k \in Z} a_k \phi(x - k)$, $a_k \in R$,

V_j – пространство всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_{k \in Z} a_k \phi(2^j x - k)$, $a_k \in R$.

$\phi(2^j x - k) = \phi\left(2^j \left(x - \frac{k}{2^j}\right)\right)$, V_j состоит из кусочно постоянных функций, которые могут иметь разрывы только в точках $\{0, \pm 1/2^j, \pm 2/2^j, \pm 3/2^j, \dots\}$.

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset \dots$$

График функции $\phi(2^j x - k)$ представляет собой ступеньку шириной $1/2^j$. Такими ступеньками можно аппроксимировать анализируемый сигнал.

Лемма 1. $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$, $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} x) \in V_0$.

Лемма 2. Последовательность $\{2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in Z\}$ образует ортонормированный базис в V_j .



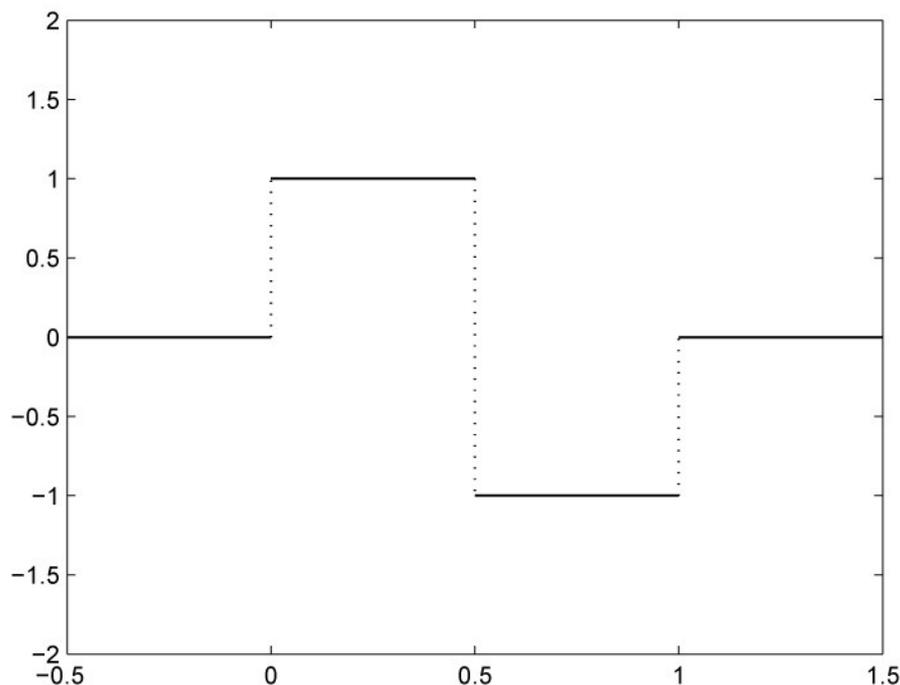
Для анализа и обработки нужно выделять компоненты сигнала, принадлежащие V_j , но не принадлежащие V_{j-1} .

Начнем с построения ортогонального дополнения к V_0 . Оно порождается сдвигами некоторой функции ψ такой, что:

1. $\psi \in V_1$, т.е. $\psi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \phi(2x - l)$ для некоторых $a_l \in \mathbb{R}$.

2. $\psi \perp V_0$, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(x - k) dx = 0$ для всех целых k .

Вейвлет-функция Хаара: $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$.



$V_1 = V_0 \oplus W_0$, где W_0 – пространство всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k)$, $a_k \in R$.

Теорема 1. Пусть W_j – пространство всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_k a_k \psi(2^j x - k)$, $a_k \in R$, тогда $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Последовательно разлагая V_j , V_{j-1} и т.д., получаем $V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} = \dots = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0$, поэтому любая функция $f \in V_j$ может быть представлена в виде

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0,$$

где $w_l \in W_l$, $0 \leq l < j$, а $f_0 \in V_0$. Компоненты w_l представляют собой «пики» функции f ширины $1/2^{l+1}$, которые не могут быть представлены в виде линейных комбинаций пиков другой ширины.

Теорема 2. Пространство $L^2(R)$ может быть разложено в бесконечную ортогональную сумму

$$L^2(R) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots,$$

т.е. любую функцию $f \in L^2(R)$ можно единственным образом представить в виде $f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$,

где $f_0 \in V_0$, а $w_j \in W_j$. Ряд сходится в смысле L^2 .



Алгоритм разложения

Для обработки или анализа сигнала нужно разложить его на компоненты по пространствам V_0 и W_0, \dots, W_{j-1} .

Сначала для достаточно большого j необходимо аппроксимировать функцию сигнала f ступенчатой функцией $f_j \in V_j$:

$$f_j(x) = \sum_{k \in Z} a_{j,k} \phi(2^j x - k).$$

В качестве коэффициентов $a_{j,k}$ берутся дискретные отсчеты функции f , т.е. $a_{j,k} = f(k/2^j)$.

Затем нужно разложить f_j по компонентам:

$$f_j = f_0 + w_0 + \dots + w_{j-2} + w_{j-1}.$$

Лемма 3.

$$\begin{aligned} \phi(2^j x) &= \frac{\phi(2^{j-1} x) + \psi(2^{j-1} x)}{2}, \\ \phi(2^j x - 1) &= \frac{\phi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x)}{2}. \end{aligned}$$



$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,2k} \phi(2^j x - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,2k+1} \phi(2^j x - 2k - 1).$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} \phi(2^j x - 2k) &= \frac{\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k)}{2}, \\ \phi(2^j x - 2k - 1) &= \frac{\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,2k} \frac{\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k)}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,2k+1} \frac{\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{2} \right) \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{2} \right) \psi(2^{j-1} x - k) = \\ &= f_{j-1} + w_{j-1}, \text{ где } f_{j-1} \in V_{j-1}, \text{ а } w_{j-1} \in W_{j-1}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi(2^j x - k) \in V_j$, тогда f_j можно

разложить в $f_j = f_{j-1} + w_{j-1}$:

$$f_{j-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-1,k} \phi(2^{j-1} x - k) \in V_{j-1},$$

$$w_{j-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j-1,k} \psi(2^{j-1} x - k) \in W_{j-1},$$

где $a_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} + a_{j,2k+1}}{2}$, $b_{j-1,k} = \frac{a_{j,2k} - a_{j,2k+1}}{2}$.

Продолжая эту процедуру, получаем $f_j = f_0 + w_0 + \dots + w_{j-2} + w_{j-1}$.



Алгоритм реконструкции

Имеем $f(x) = f_0(x) + w_0(x) + \dots + w_{j-2}(x) + w_{j-1}(x)$, где

$$f_0(x) = \sum_{k \in Z} a_{0,k} \phi(x - k), \quad w_l(x) = \sum_{k \in Z} b_{l,k} \psi(2^l x - k),$$

Нужно получить представление в терминах базиса $\phi(2^j x - k)$ пространства V_j :

$$f(x) = \sum_{k \in Z} a_{j,k} \phi(2^j x - k).$$

Лемма 4.

$$\begin{aligned} \phi(2^{j-1}x) &= \phi(2^j x) + \phi(2^j x - 1), \\ \psi(2^{j-1}x) &= \phi(2^j x) - \phi(2^j x - 1). \end{aligned}$$



$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{0,k} \phi(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_{0,k} \phi(2x - 2k) + a_{0,k} \phi(2x - 2k - 1)),$$

т.е. $f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a'_{1,k} \phi(2x - k)$, где $a'_{1,2k} = a_{0,k}$ и $a'_{1,2k+1} = a_{0,k}$.

Аналогично, $w_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{0,k} \psi(x - k)$ можно представить в виде

$$w_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b'_{1,k} \phi(2x - k), \text{ где } b'_{1,2k} = b_{0,k} \text{ и } b'_{1,2k+1} = -b_{0,k}.$$

Следовательно,

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{1,k} \phi(2x - k), \text{ где}$$

$$a_{1,k} = a'_{1,k} + b'_{1,k} = \begin{cases} a_{0,k} + b_{0,k}, & \text{если } k \text{ четно} \\ a_{0,k} - b_{0,k}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Затем таким же способом прибавляется $w_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{1,k} \psi(2x - k)$.

Теорема 4. Пусть $f(x) = f_0(x) + w_0(x) + \dots + w_{j-2}(x) + w_{j-1}(x)$, где

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{0,k} \phi(x - k), \quad w_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{l,k} \psi(2^l x - k).$$

Тогда $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi(2^j x - k)$, где $a_{l,k}$ определяются рекурсивно

для $l = 1$, затем для $l = 2$ и т.д. до $l = j$ по следующим формулам:

$$a_{l,k} = \begin{cases} a_{l-1,k} + b_{l-1,k}, & \text{если } k \text{ четно} \\ a_{l-1,k} - b_{l-1,k}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$



Контрольные вопросы

1. Какими преимуществами обладают методы вейвлет-анализа по сравнению с разложением в ряды Фурье, преобразованием Фурье и оконным преобразованием Фурье?
2. Дать определение масштабирующей функции Хаара.
3. Как выглядит аппроксимация квадратично интегрируемой функции с помощью базисных функций Хаара?
4. Доказать вложенность $V_j \subset V_{j+1}$.
5. Дать определение вейвлет-функции Хаара.
6. Доказать, что любая конечная сумма $\sum_{k \in Z} a_k \psi(x - k)$ ортогональна любой конечной сумме $\sum_{k \in Z} b_k \phi(x - k)$.
7. Что содержит каждая компонента f_j в разложении $f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$?
8. Доказать утверждение леммы 3.
9. Доказать утверждение леммы 4.
10. С какой целью осуществляются процедуры разложения и реконструкции функции сигнала?



Процедуры разложения и реконструкции в виде фильтров

Определение. Для $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ сгущающей последовательностью Dx (downsample) называется последовательность

$$Dx = (\dots, x_{-2}, x_0, x_2, \dots),$$

т.е. $(Dx)_k = x_{2k}$ для всех $k \in Z$.

Оператор D назовем downsample-оператором.

Определение. Для $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ прорежающей последовательностью Ux (upsample) называется последовательность

$$Ux = (\dots, x_{-2}, 0, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \dots),$$

$$\text{т.е. } (Ux)_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетное} \\ x_{k/2}, & \text{если } k \text{ четное.} \end{cases}$$

Оператор U назовем upsample-оператором.



Разложение

Введем два дискретных фильтра H и L через соответствующие импульсные отклики. Пусть

$$h = (\dots, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots),$$

где $h_{-1} = -\frac{1}{2}$, $h_0 = \frac{1}{2}$,

$$l = (\dots, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \dots),$$

где $l_{-1} = \frac{1}{2}$, $l_0 = \frac{1}{2}$.

Определение. Высокочастотным фильтром H (high-pass filter) назовем оператор свертки, определенный по правилу

$$Hx = h * x, \text{ тем самым } (Hx)_k = \frac{1}{2}(x_k - x_{k+1}).$$

Определение. Низкочастотным фильтром L (low-pass filter) назовем оператор свертки, определенный по правилу

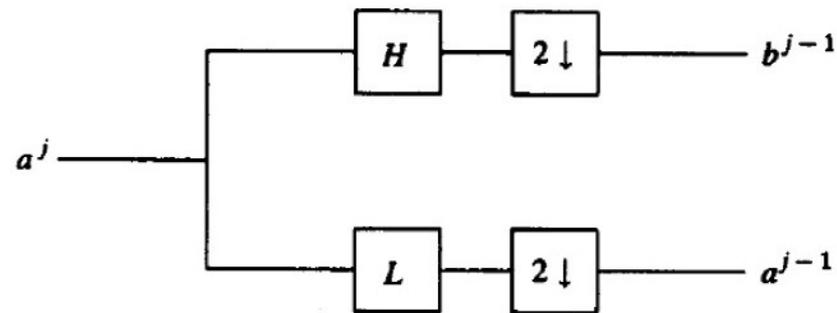
$$Lx = l * x, \text{ тем самым } (Lx)_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}).$$



Коэффициенты $a_{j-1,k}$ и $b_{j-1,k}$ определяются через набор коэффициентов a^j уровня j по следующим правилам:

$$a_{j-1,k} = (DLa^j)_k, \quad b_{j-1,k} = (DHa^j)_k.$$

Здесь DL и DH означает, что сначала последовательность коэффициентов a^j обрабатывается соответственно фильтром L (low-pass) или H (high-pass), а затем применяется downsample-оператор D . На схеме этот оператор обозначается $2 \downarrow$.



Реконструкция

Введем два дискретных фильтра \tilde{H} (high-pass filter) и \tilde{L} (low-pass filter) через соответствующие импульсные отклики. Пусть

$$\tilde{h} = (\dots, 0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0, \dots),$$

где $\tilde{h}_0 = 1, \tilde{h}_1 = -1,$

$$\tilde{l} = (\dots, 0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0, \dots),$$

где $\tilde{l}_0 = 1, \tilde{l}_1 = 1.$

Таким образом,

$$(\tilde{H}x)_k = (\tilde{h} * x)_k = x_k - x_{k-1},$$

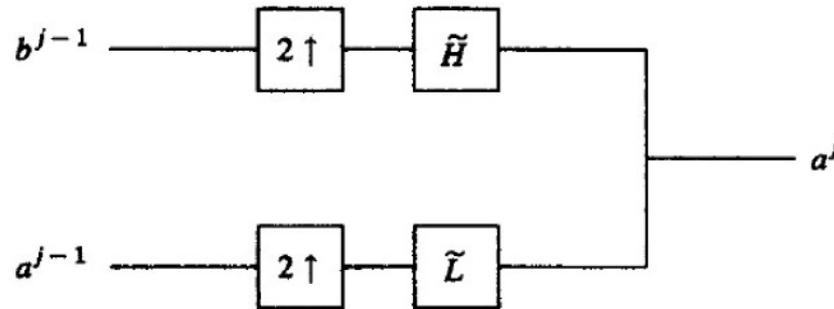
$$(\tilde{L}x)_k = (\tilde{l} * x)_k = x_k + x_{k-1}.$$



Теперь, в соответствии с алгоритмом реконструкции можно вычислить коэффициенты a^j по рекуррентной формуле

$$a^j = \tilde{L}Ua^{j-1} + \tilde{H}Ub^{j-1} \quad \text{для } j = 1, \dots, J.$$

Здесь $\tilde{L}U$ и $\tilde{H}U$ означает, что сначала к последовательностям коэффициентов применяется upsample-оператор U (на схеме он обозначается $2 \uparrow$), а затем Ua^{j-1} обрабатывается фильтром \tilde{L} (low-pass), а Ub^{j-1} фильтром \tilde{H} (high-pass).



В итоге при $j = J$ (на максимальном уровне) коэффициенты $a_{J,k}$ будут представлять собой значения обработанного сигнала в моменты времени $x = k/2^J$.

Дискретизация \rightarrow разложение \rightarrow анализ (обработка) \rightarrow реконструкция.



Контрольные вопросы

1. Дать определение `downsample`-оператора.
2. Дать определение `upsample`-оператора.
3. Почему фильтр H называется высокочастотным?
4. Почему фильтр L называется низкочастотным?
5. В какой последовательности применяются операции D и H (или L) в алгоритме разложения?
6. В какой последовательности применяются операции U и \tilde{H} (или \tilde{L}) в алгоритме реконструкции?
7. Описать последовательность шагов метода обработки сигнала.



Кратномасштабный анализ

V_j , $j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, из $L^2(\mathbb{R})$.

1. $\underline{V_j \subset V_{j+1}}$.

2. $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$.

3. $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$.

4. $f(x) \in V_j \iff f(2^{-j}x) \in V_0$.

5. $\phi(x) \in V_0$, и $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис в V_0 .

V_j называются аппроксимационными пространствами.

Функции ϕ могут быть разными (пример – Хаара).

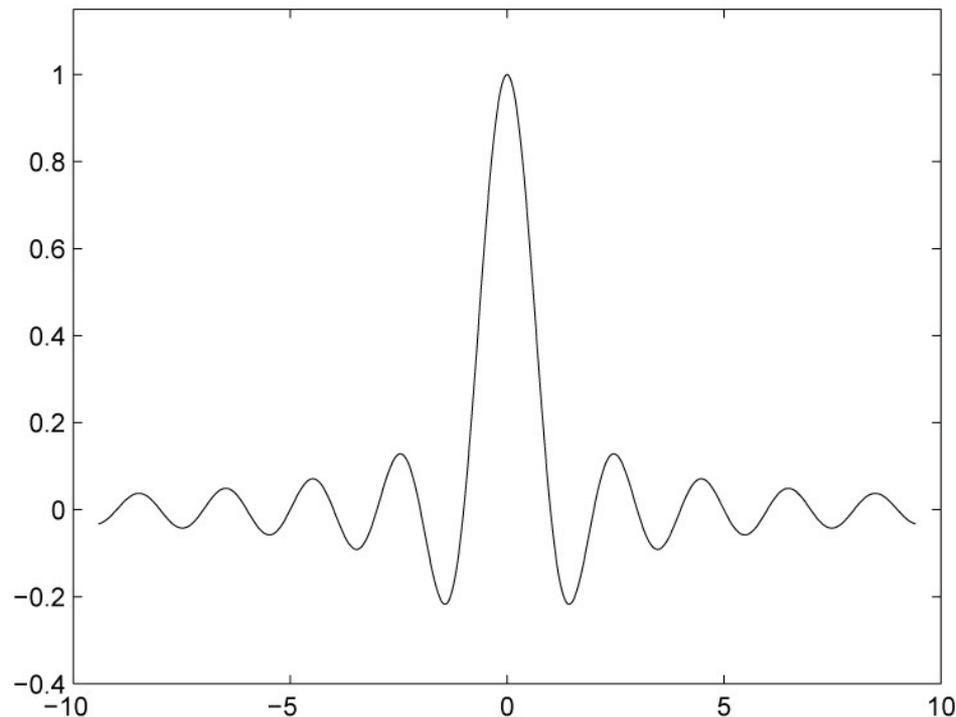
Последовательность $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ может не быть ортонормированной (но должна быть базисом).



Пример 1. КМА Хаара.

Пример 2. КМА Шеннона. $\phi(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$.

V_j представляет собой пространство функций $f \in L^2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых равно нулю вне $[-2^j\pi, 2^j\pi]$.



Пример 3. Полиномиальная аппроксимация.

$$\widehat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{m+1} e^{-i\delta\omega/2},$$

$\delta = 1$, если m четно, и $\delta = 0$, если m нечетно.

Последовательность $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ не ортонормирована, однако образует устойчивый базис (базис Рисса).

Пример 4. Кратномасштабный анализ Добеши.

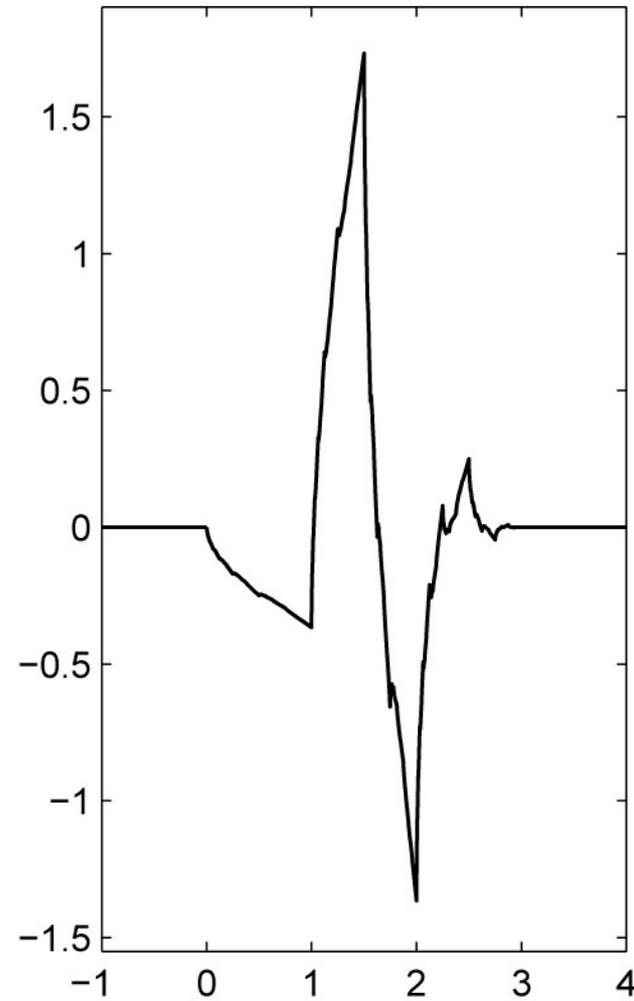
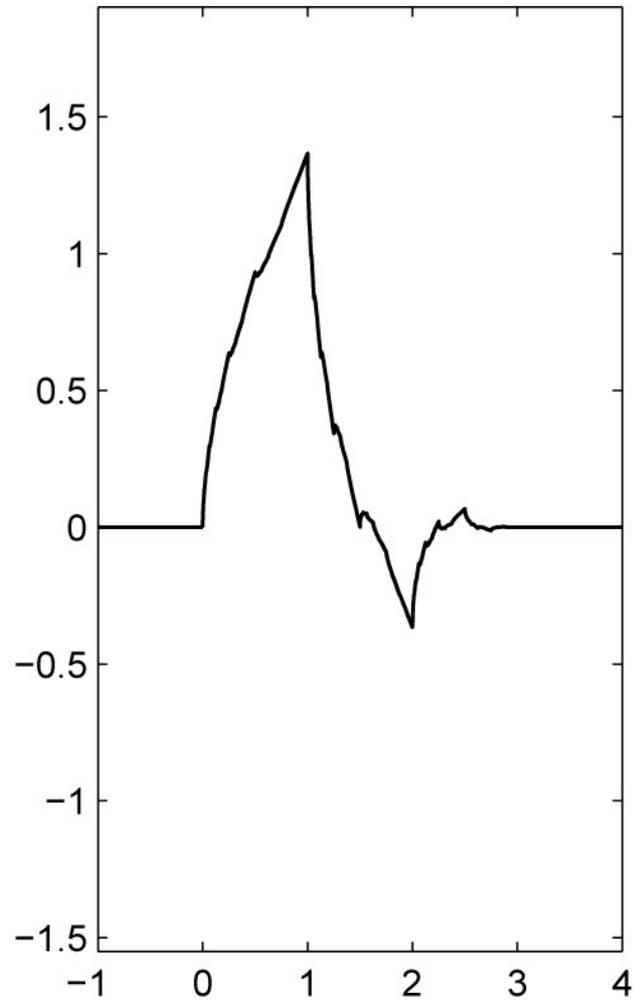
Класс масштабирующих функций и ассоциированных с ними вейвлет-функций, имеющих компактный носитель и заданное число непрерывных производных. Вейвлет-функции Добеши классифицируются по числу N нулевых моментов, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi_N(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

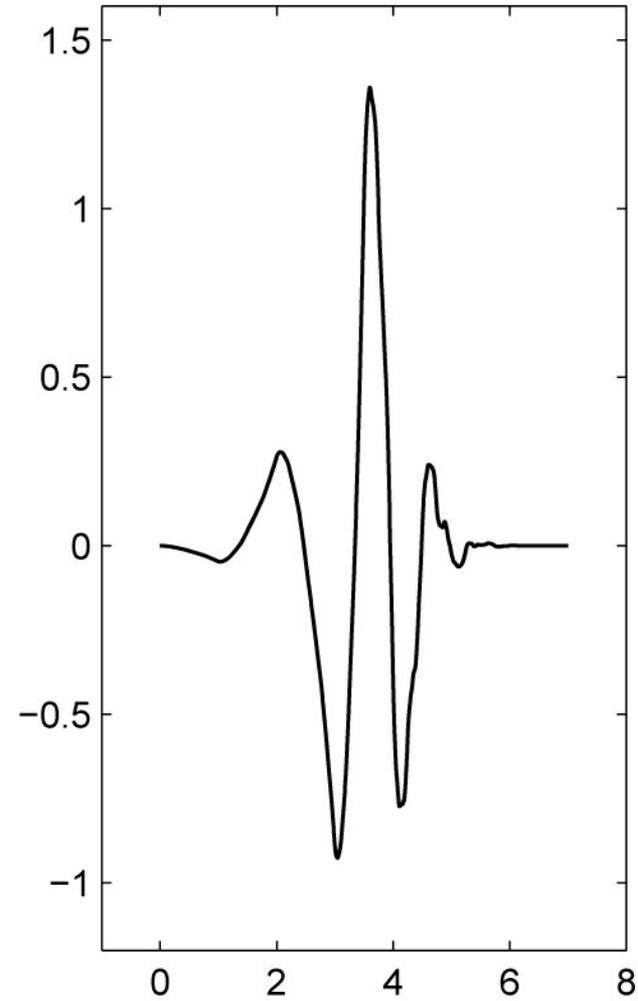
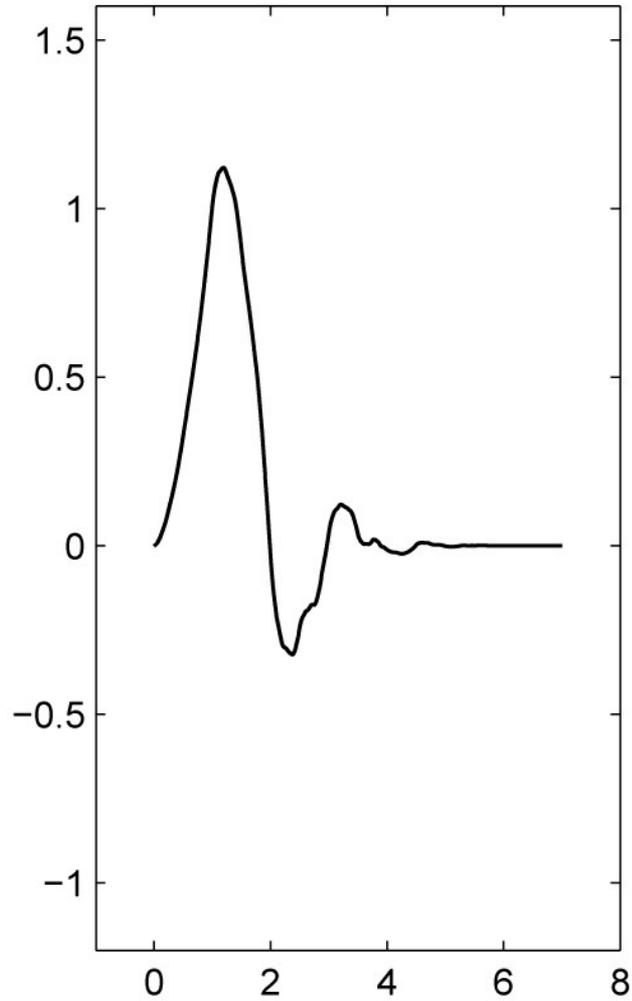
Для больших N количество непрерывных производных у $\phi_N(x)$ и $\psi_N(x)$ примерно равно $N/5$.



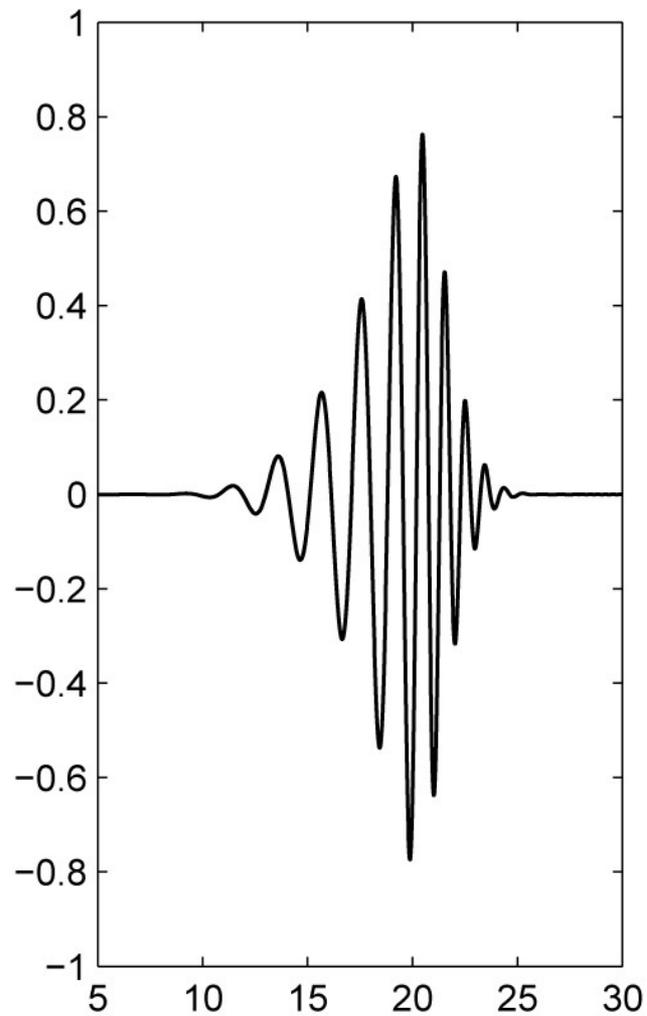
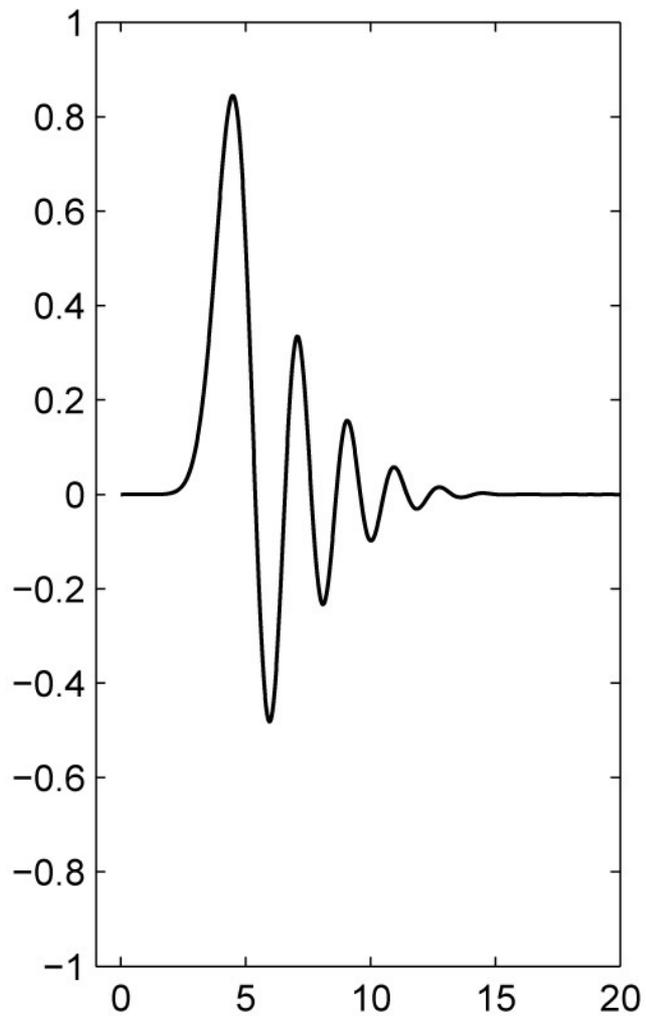
Масштабирующая функция и вейвлет Добеши для $N = 2$.



Масштабирующая функция и вейвлет Добеши для $N = 4$.



Масштабирующая функция и вейвлет Добеши для $N = 20$.



Теорема 1. Пусть $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ , тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ последовательность функций $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ является ортонормированным базисом в V_j .

Теорема 2. (масштабное соотношение) Пусть $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ , тогда справедливо следующее соотношение:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k), \text{ где } p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx.$$

Более того,

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi(2^j x - k) \text{ или } \phi_{j-1,l} = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi_{j,k}.$$

Для КМА Хаара $p_0 = p_1 = 1, p_k = 0$ при $k \neq 0, 1$.

Для КМА Добеши ($N = 2$)

$$p_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, p_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4},$$

$$p_k = 0 \text{ при } k \neq 0, 1, 2, 3.$$



Необходимо разложение $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Теорема 3. Пусть $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ , и пусть пространство W_j порождается семейством функций $\{\psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, где

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k),$$

а p_k те же, что в теореме 2, тогда $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Кроме того, последовательность функций $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ образует ортонормированный базис в W_j . Функция ψ называется вейвлет-функцией.

Для масштабирующей функции Хаара $p_0 = 1$ и $p_1 = 1$. По теореме 3 $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$, что согласуется с определением вейвлет-функции Хаара.

Из теоремы 3 следует $\psi_{j,k} = 2^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \overline{p_{1-l+2k}} \phi_{j+1,l}$.



Последовательно разлагая V_j , V_{j-1} и т.д., получаем

$$V_j = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0.$$

Поскольку пространства V_j определены и для $j < 0$, эту процедуру можно продолжить:

$$V_j = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \dots.$$

При $j \rightarrow \infty$ получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $\{V_j, j \in Z\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ . W_j – ортогональное дополнение к V_j до V_{j+1} . Пространство $L^2(R)$ может быть разложено в бесконечную ортогональную сумму

$$L^2(R) = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots,$$

т.е. любую функцию $f \in L^2(R)$ можно единственным образом представить в виде

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j, \text{ где } w_j \in W_j. \text{ Ряд сходится в смысле } L^2.$$



Контрольные вопросы

1. Дать определение кратномасштабного анализа.
2. В чем заключаются особенности кратномасштабного анализа Шеннона?
3. Что означает свойство: вейвлет-функция имеет N нулевых моментов?
4. Какими основными свойствами обладают вейвлеты Добеши?
5. Что такое масштабное соотношение?
6. Как в произвольном кратномасштабном анализе вейвлет-функция выражается через масштабирующую функцию?



Свойства масштабирующих функций. Достаточные условия.

Теорема 5. Пусть функция ϕ непрерывна, имеет компактный носитель и удовлетворяет следующим условиям:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ (нормализация)

2. $\phi(x) = \sum_{k \in Z} p_k \phi(2x - k)$ для конечного числа k

(масштабное соотношение)

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - k) \phi(x - l) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l \end{cases}$

(ортонормированность сдвигов)

Пусть V_j порождается семейством $\{\phi(2^j x - k), k \in Z\}$.

Тогда $\{V_j, j \in Z\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ .



Утверждение 1. Масштабное соотношение

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$$

эквивалентно

$$\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega/2) P(e^{-i\omega/2}), \text{ где } P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k z^k.$$

Используя утверждение 1, для $\widehat{\phi}(\omega/2)$ получаем

$$\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega/2^2) P(e^{-i\omega/2}) P(e^{-i\omega/2^2}).$$

Продолжая таким же образом, получаем для любого n

$$\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega/2^n) \prod_{j=1}^n P(e^{-i\omega/2^j}).$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{j=1}^{\infty} P(e^{-i\omega/2^j}).$$

Пусть $Q(z) = -z \overline{P(-z)}$.

Можно показать, что $\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega/2) Q(e^{-i\omega/2})$.



Построение масштабирующей функции

Теорема 6. Если функция ϕ удовлетворяет условию ортонормированности сдвигов и масштабному соотношению, тогда при всех $z \in \mathbb{C}$, таких что $|z| = 1$, многочлен $P(z) = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k z^k$ удовлетворяет

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1.$$

Пусть построен многочлен $P(z)$ и пусть $P(1) = 1$.

Масштабирующая функция ϕ строится итерационно.

$\phi_0(x)$ – масштабирующая функция Хаара.

Далее $\phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi_{n-1}(2x - k)$ для $n \geq 1$.

Теорема 7. Пусть $P(z) = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k z^k$ удовлетворяет условиям:

$P(1) = 1$, $|P(e^{-it})| > 0$ при $|t| \leq \frac{\pi}{2}$, и $|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1$ при $|z| = 1$.

Обозначим через $\phi_0(x)$ масштабирующую функцию Хаара и определим ϕ_n с помощью описанной процедуры. Тогда при $n \rightarrow \infty$ последовательность ϕ_n сходится поточечно и в L^2 к функции ϕ , удовлетворяющей условию ортонормированности сдвигов и масштабному соотношению с коэффициентами p_k многочлена P .

То есть такая функция ϕ порождает некоторый КМА.



Алгоритмы разложения и реконструкции

Пусть $f_j \in V_j$, т.е. $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi(2^j x - k)$. Поскольку функции

$\phi_{j,k}$ образуют ортонормированный базис в V_j ,

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f_j, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

а поскольку $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, также можно записать

$$\begin{aligned} f_j &= f_{j-1} + w_{j-1} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f_j, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f_j, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}, \end{aligned}$$

Используя масштабное соотношение, имеем

$$\langle f_j, \phi_{j-1,k} \rangle = 2^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{p_{l-2k}} \langle f_j, \phi_{j,l} \rangle.$$

Далее, используя определение $\psi_{j,k}$ и теорему 3, получаем

$$\langle f_j, \psi_{j-1,k} \rangle = 2^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l p_{1-l+2k} \langle f_j, \phi_{j,l} \rangle.$$

$\langle f_j, \phi_{j-1,k} \rangle$ – коэффициенты аппроксимации.

$\langle f_j, \psi_{j-1,k} \rangle$ – коэффициенты детализации.

Процедуру можно повторить, разложив f_{j-1} на f_{j-2} и w_{j-2} и т.д. до $f_j = f_0 + w_0 + \dots + w_{j-1}$.



Для получения формулы реконструкции воспользуемся формулами разложения для функции $\phi_{j,k}$.

Учитывая ортогональность функций $\phi_{j,k}$, имеем

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \overline{p_{k-2l}} \phi_{j-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} (-1)^k p_{1-k+2l} \psi_{j-1,l}.$$

Используя это разложение, получаем формулу реконструкции в следующем виде:

$$\langle f_j, \phi_{j',k} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \overline{p_{k-2l}} \langle f_j, \phi_{j'-1,l} \rangle + \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} (-1)^k p_{1-k+2l} \langle f_j, \psi_{j'-1,l} \rangle.$$

Коэффициенты $\langle f_j, \phi_{j',k} \rangle$ определяются рекурсивно для $j' = 1$, затем для $j' = 2$ и т.д. до $j' = j$. Таким образом восстанавливается сигнал в виде $f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi(2^j x - k)$.

Аппроксимация

$$f_j(x) = P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \phi(2^j x - k), \text{ где } a_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^j x - k) dx.$$

Утверждение 2. Пусть $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ – кратномасштабный анализ с масштабирующей функцией ϕ , имеющей компактный носитель. Если $f \in L^2(\mathbb{R})$ непрерывна, то для достаточно больших j

$$a_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(2^j x - k) dx \approx a f\left(\frac{k}{2^j}\right), \text{ где } a = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx (= 1).$$



Процедура разложения в виде фильтрации

Введем два дискретных фильтра H и L через соответствующие импульсные отклики. Пусть

$$\{h\} : h_k = \frac{1}{2}(-1)^k p_{k+1}, \quad \{l\} : l_k = \frac{1}{2}\bar{p}_{-k}.$$

Высокочастотный фильтр H (high-pass filter) определяется по правилу

$$Hx = h * x.$$

Низкочастотным фильтром L (low-pass filter) определяется по правилу

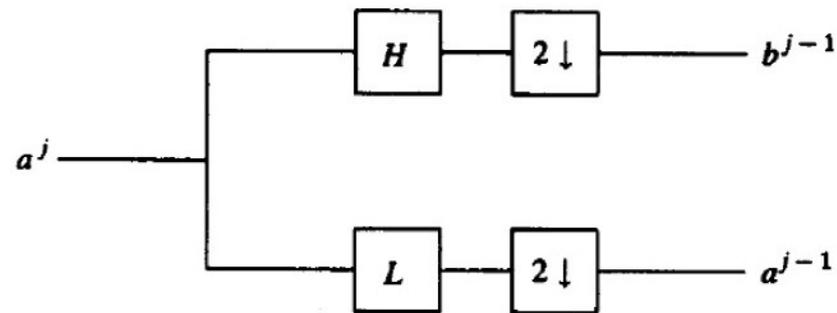
$$Lx = l * x.$$



Коэффициенты $a_{j-1,k}$ и $b_{j-1,k}$ определяются через набор коэффициентов a^j уровня j по следующим правилам:

$$a_{j-1,k} = (DL a^j)_k, \quad b_{j-1,k} = (DH a^j)_k.$$

Здесь DL и DH означает, что сначала последовательность коэффициентов a^j обрабатывается соответственно фильтром L (low-pass) или H (high-pass), а затем применяется downsample-оператор D . На схеме этот оператор обозначается $2 \downarrow$.



Процедура реконструкции в виде фильтрации

Введем два дискретных фильтра \tilde{H} и \tilde{L} через соответствующие импульсные отклики. Пусть

$$\{\tilde{h}\} : \tilde{h}_k = (-1)^k \bar{p}_{1-k}, \quad \{\tilde{l}\} : \tilde{l}_k = p_k.$$

Высокочастотный фильтр \tilde{H} (high-pass filter) определяется по правилу

$$\tilde{H}x = \tilde{h} * x.$$

Низкочастотным фильтром \tilde{L} (low-pass filter) определяется по правилу

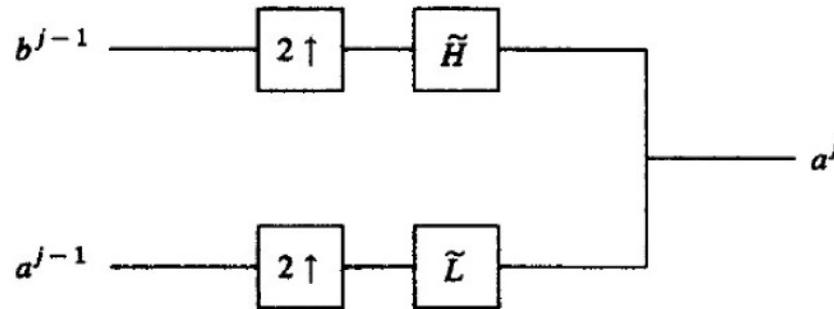
$$\tilde{L}x = \tilde{l} * x.$$



Теперь, в соответствии с алгоритмом реконструкции можно вычислить коэффициенты a^j по рекуррентной формуле

$$a^j = \tilde{L}Ua^{j-1} + \tilde{H}Ub^{j-1} \quad \text{для } j = 1, \dots, J.$$

Здесь $\tilde{L}U$ и $\tilde{H}U$ означает, что сначала к последовательностям коэффициентов применяется upsample-оператор U (на схеме он обозначается $2 \uparrow$), а затем Ua^{j-1} обрабатывается фильтром \tilde{L} (low-pass), а Ub^{j-1} фильтром \tilde{H} (high-pass).



В итоге при $j = J$ (на максимальном уровне) коэффициенты $a_{J,k}$ будут представлять собой значения обработанного сигнала в моменты времени $x = k/2^J$.

Дискретизация → разложение → анализ (обработка) → реконструкция.



Контрольные вопросы

1. Каким достаточным условиям должна удовлетворять функция $\phi(x)$, чтобы быть масштабирующей функцией некоторого кратномасштабного анализа?
2. Как записывается масштабное соотношение в терминах преобразования Фурье?
3. Каким условиям должен удовлетворять многочлен, участвующий в построении масштабирующей функции?
4. Как выражаются коэффициенты аппроксимации и деталей на масштабе $j - 1$ через коэффициенты аппроксимации на масштабе j ?
5. Как выражаются коэффициенты аппроксимации масштабе j через коэффициенты аппроксимации и деталей на масштабе $j - 1$?
6. Какими последовательностями определяются высокочастотные и низкочастотные фильтры при разложении и реконструкции в произвольном кратномасштабном анализе?
7. Описать последовательность шагов метода обработки сигналов при помощи кратномасштабного анализа.



Краевые эффекты

Пример. Пусть используются вейвлеты Добеши ($N = 2$) для разложения сигнала из n отсчетов.

a^j – вектор коэффициентов, импульсные отклики:

$$l = \frac{1}{2}(\dots, 0, p_3, p_2, p_1, p_0, 0, \dots).$$

(ненулевые коэффициенты при $k = -3, -2, -1, 0$)

$$h = \frac{1}{2}(\dots, 0, -p_0, p_1, -p_2, p_3, 0, \dots).$$

(ненулевые коэффициенты при $k = -1, 0, 1, 2$)

Тогда

$$a_{j-1,k} = (DL a^j)_k = \frac{1}{2}(p_0 a_{j,2k} + p_1 a_{j,2k+1} + p_2 a_{j,2k+2} + p_3 a_{j,2k+3}),$$
$$b_{j-1,k} = (DH a^j)_k = \frac{1}{2}(p_3 a_{j,2k} - p_2 a_{j,2k+1} + p_1 a_{j,2k+2} - p_0 a_{j,2k+3}).$$

Пусть, например, $n = 8$: $a^3 = \{s_0, \dots, s_7\}$.

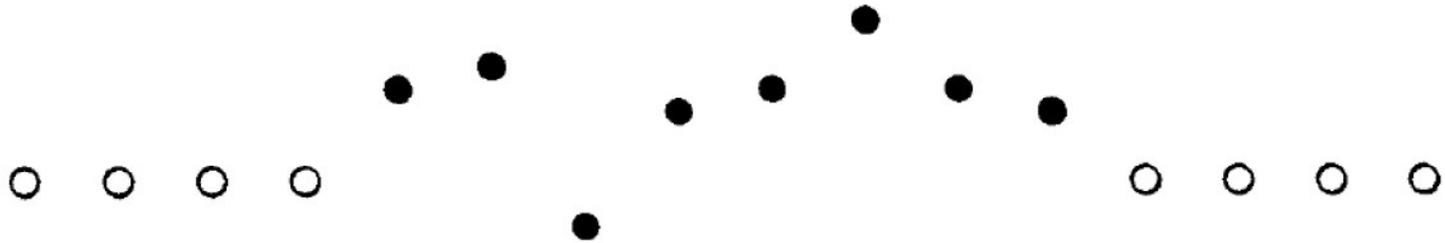
Чтобы вычислить коэффициент $a_{2,3}$ необходимы коэффициенты s_6, \dots, s_9 . Но у нас нет s_9 !

Фильтрам необходимы отсчеты сигнала, которых нет.

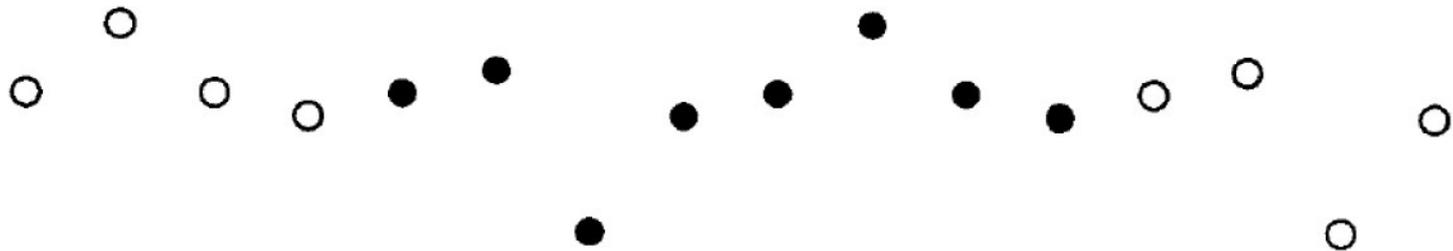


Методы решения проблемы

1. Заполнение нулями (если сигнал длинный и его концы не имеют значения или сигнал внезапно начинается и заканчивается): $s_k = 0$ при $k < 0$ и $k > n - 1$.

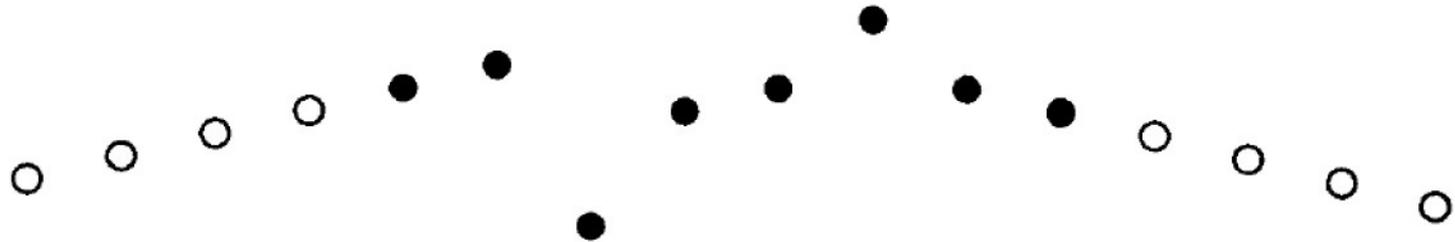


2. Периодическое продолжение: $s_{k+n} = s_k$ (повторное использование отсчетов сигнала).



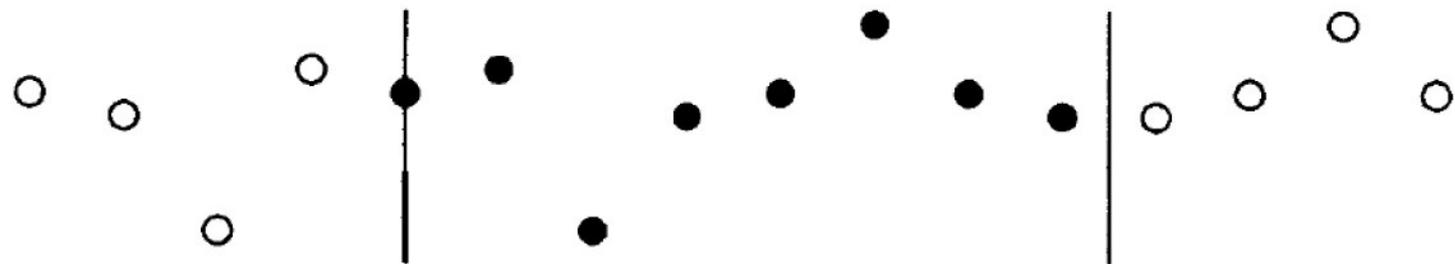
3. Линейная интерполяция (на обоих концах).

Подходит, если сигнал не слишком зашумлен на краях.



4. Симметричное продолжение.

Сигнал отражается четным образом на концах.



Нарушается гладкость функции сигнала.



Вычислительная сложность

Пусть f непрерывна и определена на отрезке $[0, 1]$.

$$a_{n,l} = f\left(\frac{l}{2^n}\right), \quad l = 0, \dots, 2^n - 1 \text{ — отсчеты сигнала } (N = 2^n).$$

По формулам алгоритма разложения:

$$a_{j-1,l} = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \overline{p_{k-2l}} a_{j,k}.$$

$$b_{j-1,l} = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} (-1)^k p_{1-k+2l} a_{j,k}.$$

Коэффициентов a^{j-1} в 2 раза меньше, чем a^j .

Пусть L — число ненулевых коэффициентов p_k . На масштабе $j - 1$ нужно вычислить 2^{j-1} коэффициентов, для каждого требуется $L + 1$ умножений (включая умножение на $1/2$). Такое же число умножений требуется для вычисления коэффициентов b^{j-1} .

$$2(L + 1)2^{n-1} + \dots + 2(L + 1)2^0 = 2(L + 1)(2^n - 1) \approx 2(L + 1)N.$$

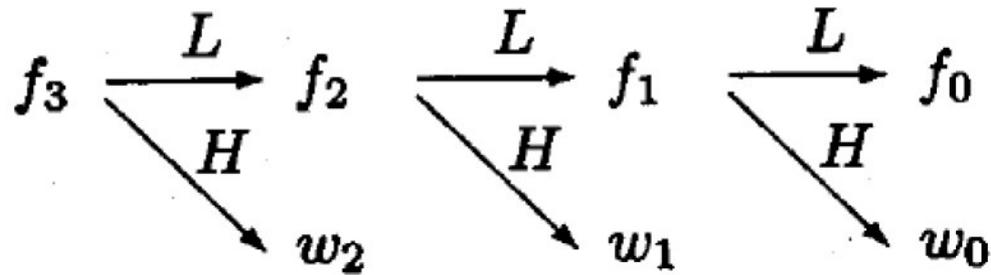
Вычислительная сложность равна $O(N)$. Вычислительная сложность быстрого преобразования Фурье равна $O(N \log N)$. Поэтому вейвлет-преобразование называют «сверхбыстрым».

Однако это сравнение нечестное, т.к. БПФ разлагает сигнал на все частотные компоненты от 0 до $\frac{N}{2}$. Вейвлет-преобразование разлагает сигнал на частотные компоненты из диапазонов от 2^{j-1} до 2^j . Следовательно, БПФ дает более детальное частотное представление.



Вейвлет-пакеты

Пусть $f_3 \in V_3$. После применения алгоритма разложения
 $f_3 = f_0 + w_0 + w_1 + w_2$.



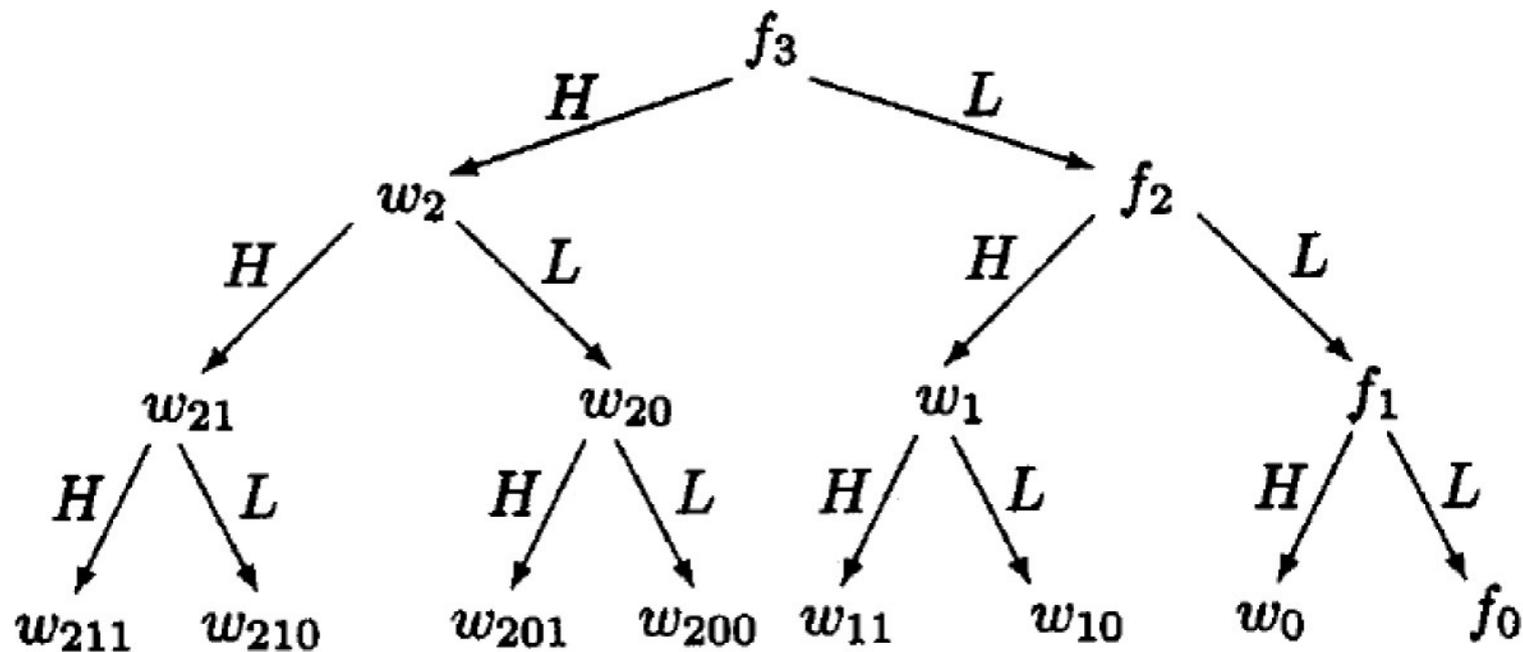
f_3 содержит частотные компоненты с номерами от 1 до 8.
 w_2 – с номерами от 5 до 8, w_1 – с номерами 3 и 4,
 w_0 – с номером 2 и f_0 – с номером 1.



Применим фильтры H и L к w_2 , w_1 и w_0 .

Дальнейшее применение H и L к w_2 дает компоненты w_{21} и w_{20} .

Процесс повторяется до тех пор пока не получено разложение по всем частотным компонентам.



Для каждой компоненты на k масштабе требуется $O(2^{n-k})$ умножений. Всего на k -м масштабе 2^k компонент. Следовательно, требуется $O(2^n)$ умножений. Общее число умножений на всех n масштабах $O(n2^n) = O(N \log N)$, т.е. такое же, как у БПФ.



Многомерный кратномасштабный анализ

Пусть $\phi(x)$ и $\psi(x)$ ассоциированы с одномерным КМА.

Определим $\Phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$.

$$\{\Phi_{j,m,n}(x, y) = 2^j \Phi(2^j x - m, 2^j y - n), m, n \in Z\}$$

образует ортонормированный базис в $V_j = V'_j \otimes V'_j$,

V'_j – аппроксимационное пространство одномерного КМА.

Аппроксимацией функции $f \in L^2(R^2)$ является проекция на пространство V_j :

$$f_j(x, y) = \sum_{m,n \in Z} a_{j,m,n} \Phi_{j,m,n}(x, y),$$

где $a_{j,m,n} = \langle f, \Phi_{j,m,n} \rangle = \langle f_j, \Phi_{j,m,n} \rangle$.

В регулярном случае $a_{j,m,n} \approx 2^{-j} f(m/2^j, n/2^j)$.



W_{j-1} ортогональное дополнение к V_{j-1} в V_j .

$$\Psi^{[1]}(x, y) = \phi(x)\psi(y), \quad \Psi^{[2]}(x, y) = \phi(y)\psi(x), \quad \Psi^{[3]}(x, y) = \psi(x)\psi(y),$$
$$\{\Psi_{j-1,m,n}^{[1]}, \Psi_{j-1,m,n}^{[2]}, \Psi_{j-1,m,n}^{[3]}, m, n \in Z\},$$

образует ортонормированный базис в пространстве W_{j-1} .

Проекция f на пространство W_{j-1} определяется выражением

$$w_{j-1}(x, y) = d_{j-1}^{[1]}(x, y) + d_{j-1}^{[2]}(x, y) + d_{j-1}^{[3]}(x, y),$$

где $d_{j-1}^{[l]}(x, y) = \sum_{m,n \in Z} b_{j-1,m,n}^{[l]} \Psi_{j-1,m,n}^{[l]}(x, y),$

а $b_{j-1,m,n}^{[l]} = \langle f, \Psi_{j-1,m,n}^{[l]} \rangle = \langle f_j, \Psi_{j-1,m,n}^{[l]} \rangle.$

$d_{j-1}^{[1]}(x, y)$ описывает вертикальные детали,

$d_{j-1}^{[2]}(x, y)$ – горизонтальные детали,

$d_{j-1}^{[3]}(x, y)$ – диагональные детали.



Разложение

Формулы разложения получаются аналогично формулам одномерного КМА:

$$a_{j-1,m,n} = 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{k-2m} p_{l-2n}} a_{j,k,l},$$

$$b_{j-1,m,n}^{[1]} = 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{k-2m}} (-1)^l p_{1-l+2n} a_{j,k,l},$$

$$b_{j-1,m,n}^{[2]} = 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^k p_{1-k+2m} \overline{p_{l-2n}} a_{j,k,l},$$

$$b_{j-1,m,n}^{[3]} = 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^{k+l} p_{1-k+2m} p_{1-l+2n} a_{j,k,l}.$$



Реконструкция

Формула реконструкции получается из разложения

$$\begin{aligned} \Phi_{j,m,n}(x,y) &= 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{m-2k} p_{n-2l}} \Phi_{j-1,k,l}(x,y) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{m-2k}} (-1)^n p_{1-n+2l} \Psi_{j-1,k,l}^{[1]}(x,y) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^m p_{1-m+2k} \overline{p_{n-2l}} \Psi_{j-1,k,l}^{[2]}(x,y) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^{m+n} p_{1-m+2k} p_{1-n+2l} \Psi_{j-1,k,l}^{[3]}(x,y). \end{aligned}$$

Отсюда $a_{j',m,n} = 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{m-2k} p_{n-2l}} a_{j'-1,k,l} +$

$$\begin{aligned} &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} \overline{p_{m-2k}} (-1)^n p_{1-n+2l} b_{j'-1,k,l}^{[1]} + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^m p_{1-m+2k} \overline{p_{n-2l}} b_{j'-1,k,l}^{[2]} + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k,l \in Z} (-1)^{m+n} p_{1-m+2k} p_{1-n+2l} b_{j'-1,k,l}^{[3]}. \end{aligned}$$

$a_{j',m,n}$ определяются рекурсивно для $j' = 1$ и т.д. до $j' = j$.



Контрольные вопросы

1. Какая проблема возникает при вычислении коэффициентов разложения вблизи начала и конца сигнала?
2. Какие методы используются для борьбы с краевыми эффектами?
3. Какова вычислительная сложность алгоритма вейвлет-разложения?
4. По каким диапазонам частот раскладывает сигнал алгоритм вейвлет-разложения?
5. Как вейвлет-пакеты позволяют получить разложение сигнала по всем частотным компонентам?
6. Какую вычислительную сложность имеет алгоритм вейвлет-пакетов?
7. Что такое тензорное произведение кратномасштабных анализов?
8. Какую структуру имеет ортогональное дополнение к аппроксимационному пространству в 2-мерном кратномасштабном анализе?



Непрерывное вейвлет-преобразование

По аналогии с преобразованием Фурье можно ввести непрерывное вейвлет-преобразование.

Пусть $\psi(x) \in L^2(R)$ и

$$C_\psi = 2\pi \int_0^\infty |\hat{\psi}(a)|^2 \frac{da}{a} = 2\pi \int_0^\infty |\hat{\psi}(-a)|^2 \frac{da}{a} < \infty.$$

Это условие допустимости, а $\psi(x)$ - допустимая вейвлет-функция.

Для выполнения условия допустимости требуется, чтобы $\hat{\psi}(0) = 0$.

Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$.

У допустимой вейвлет-функции есть хотя бы один нулевой момент.

Пусть $f(x) \in L^2(R)$. Ее вейвлет-преобразование

$$W_\psi f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad b \in R, \quad a > 0.$$

Если ввести обозначение $\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$,

то можно записать $W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$.

Кроме того, $W_\psi f(a, b) = f * \tilde{\psi}_{a,0}(b)$, где $\tilde{\psi}_{a,0}(x) = \overline{\psi_{a,0}(-x)}$.

Для удобства введем еще одно обозначение вейвлет-преобразования, как оператора: $W_\psi[f](a, b) = W_\psi f(a, b)$.



Свойства вейвлет-преобразования

1. $W_\psi[f + g](a, b) = W_\psi[f](a, b) + W_\psi[g](a, b),$
 $W_\psi[cf](a, b) = cW_\psi[f](a, b).$

2. $W_\psi[f(x - t)](a, b) = W_\psi[f(x)](a, b - t).$

3. $W_\psi[f(cx)](a, b) = \frac{1}{\sqrt{c}} W_\psi[f(x)](ca, cb), \quad c > 0.$

4. Если $f(x)$ и $\psi(x)$ n раз непрерывно дифференцируемы, и для всех $0 \leq k \leq n$ и любого $m \in \mathbb{N}$ найдется C_m , что при всех $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \{ \psi(x) \} \right| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m},$$

то $W_\psi \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \{ f(x) \} \right] (a, b) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \{ \overline{\psi_{a,b}(x)} \} dx.$

5. Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема в окрестности x_0 , а $\psi(x)$ удовлетворяет 4 и имеет n нулевых моментов, то

$$|W_\psi f(a, x_0)| \leq Ca^{n+1/2} \quad \text{при } a \rightarrow 0$$



Утверждение 1. (формула Планшереля) Пусть $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ – допустимая вейвлет-функция и $C_\psi \neq 0$, тогда для $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}.$$

Утверждение 2. (формула обращения) Пусть $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ – допустимая вейвлет-функция, $C_\psi \neq 0$ и $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(x) db \frac{da}{a^2}.$$

Последовательность функций $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$, порождающая КМА, образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$, т.е. для $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Здесь $b_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = W_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Такой связи между рядами Фурье и преобразованием Фурье нет, поскольку они определены на разных классах функций.

Ряд Фурье определен на $L^2([a, b])$, а преобразование Фурье на $L^2(\mathbb{R})$.

Вейвлет-ряды и непрерывные вейвлет-преобразования определены для функций из $L^2(\mathbb{R})$.



Многомерное вейвлет-преобразование

Рассмотрим случай размерности 2.

Пусть вейвлет-функция $\psi(x, y)$ имеет круговую симметрию, тогда для ее преобразование Фурье:

$$\widehat{\psi}(\omega_1, \omega_2) = \eta(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}).$$

Условие допустимости:

$$C_\psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty |\eta(a)|^2 \frac{da}{a} < \infty.$$

Вейвлет-преобразование функции $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$W_\psi f(a, b_1, b_2) = \langle f, \psi_{a,b_1,b_2} \rangle, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

где $\psi_{a,b_1,b_2}(x, y) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b_1}{a}, \frac{y-b_2}{a}\right)$,

Формула обращения:

$$f(x, y) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a, b_1, b_2) \psi_{a,b_1,b_2}(x, y) db_1 db_2 \frac{da}{a^3}.$$



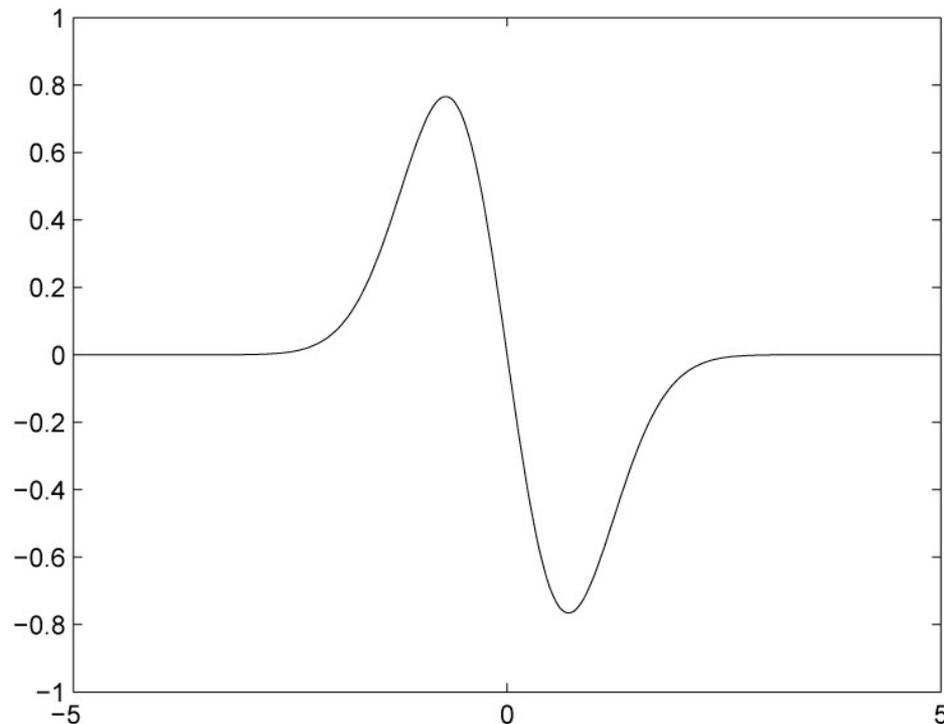
Примеры

Пример 1. Вещественные вейвлет-функции часто получают с помощью дифференцирования функции Гаусса:

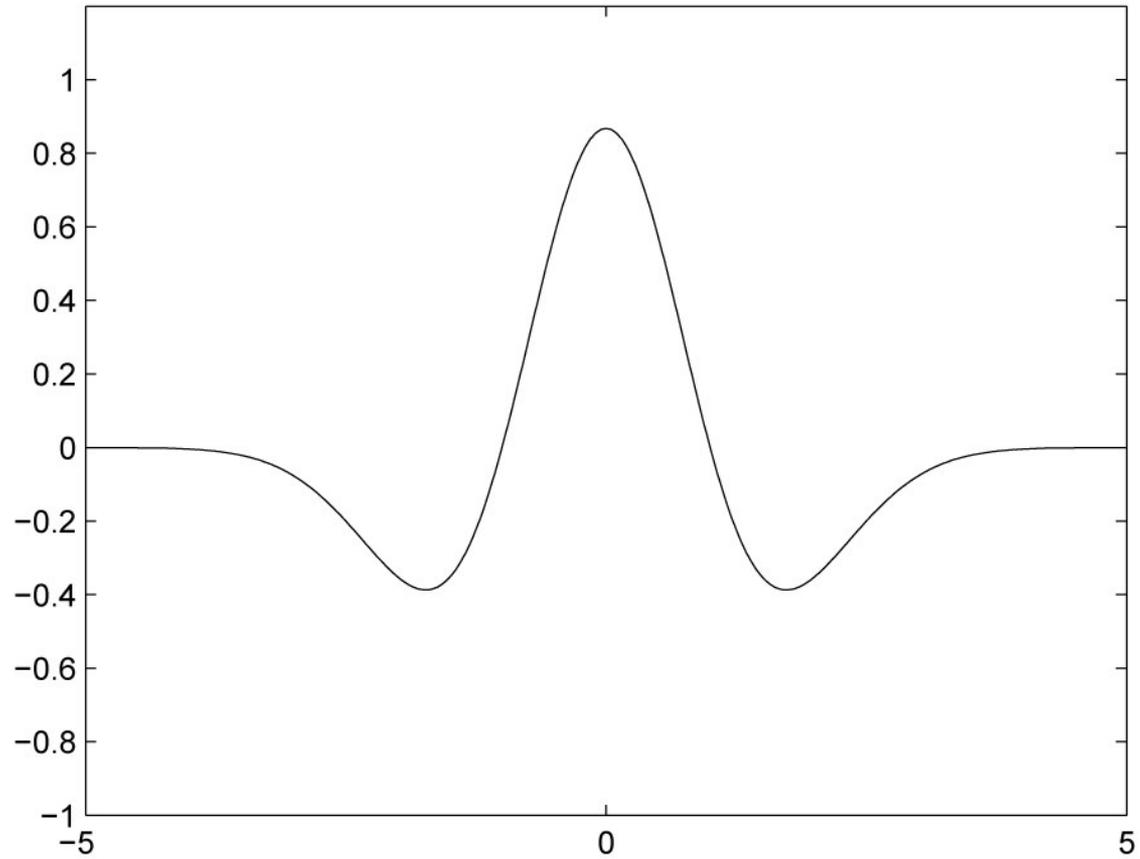
$$\psi_m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2}, \quad \hat{\psi}_m(\omega) = (-i\omega)^m e^{-\omega^2/2}, \quad m \geq 1.$$

Более высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют анализировать особенности более высокого порядка.

Для $m = 1$ вейвлет-функцию называют WAVE-вейвлет.

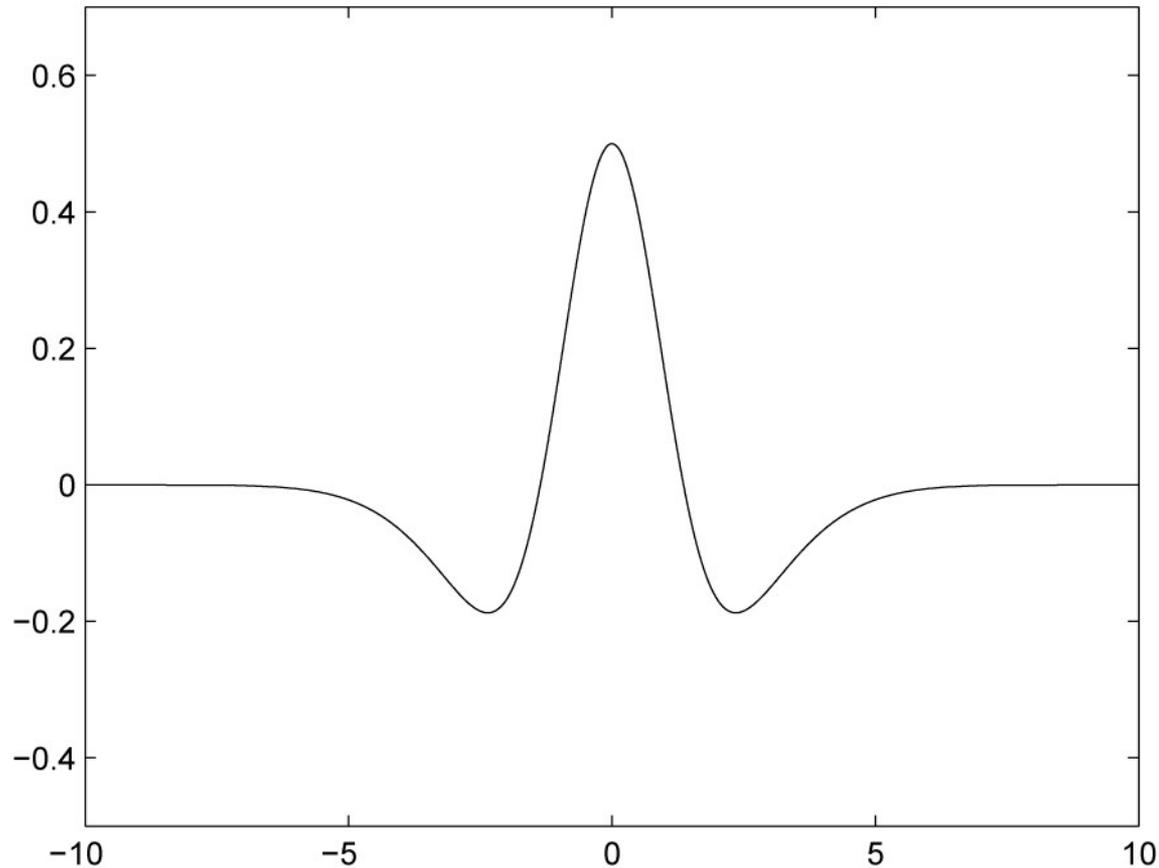


Для $m = 2$ – МНАТ-вейвлет или «мексиканская шляпа».



Пример 2. На основе функции Гаусса также строится часто используемый DOG-вейвлет (Difference of Gaussians):

$$\psi(x) = e^{-x^2/2} - \frac{1}{2}e^{-x^2/8}, \quad \hat{\psi}(\omega) = e^{-\omega^2/2} - e^{-2\omega^2}.$$



Пример 3. Вейвлет-функция Мейера:

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 2^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) \overline{\widehat{h}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) & \text{при } 2\pi/3 \leq |\omega| < 4\pi/3, \\ 2^{-1/2} \exp\left(-\frac{i\omega}{2}\right) \widehat{h}\left(\frac{\omega}{4}\right) & \text{при } 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где функция $\widehat{h}(\omega)$ удовлетворяет условиям

$$\left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\widehat{h}(\omega + \pi)\right|^2 = 2$$

и

$$\widehat{h}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } \omega \in [-\pi/3, \pi/3], \\ 0 & \text{при } \omega \in [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{cases}$$

В области $[-2\pi/3, -\pi/3] \cup [\pi/3, 2\pi/3]$ поведение функции $\widehat{h}(\omega)$ может быть достаточно произвольным.

Вейвлеты Мейера имеют бесконечное число нулевых моментов, но не имеют компактного носителя. $\widehat{h}(\omega)$ можно выбрать так, чтобы $\widehat{\psi}(\omega)$ обладала заданным числом непрерывных производных и, таким образом, $\psi(x)$ достаточно быстро убывала на бесконечности.



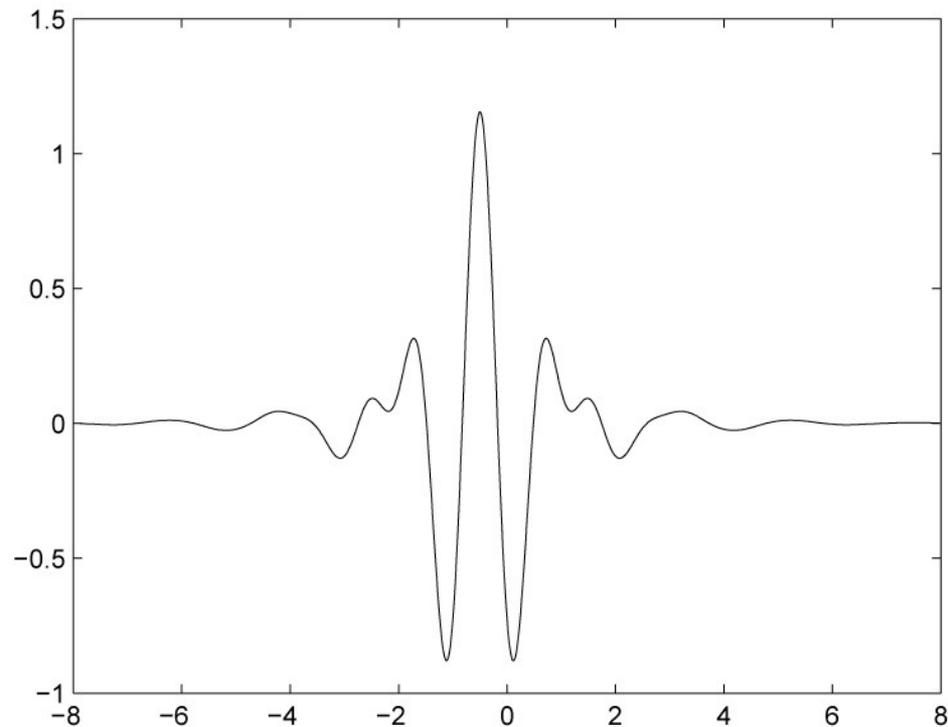
На рисунке приведен график вейвлета Мейера для

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{3|\omega|}{\pi} - 1 \right) \right] \quad \text{при } |\omega| \in [\pi/3, 2\pi/3],$$

где

$$\beta(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3).$$

Так доопределенная функция $\hat{h}(\omega)$ обеспечивает 3 непрерывные производные $\hat{\psi}(\omega)$.

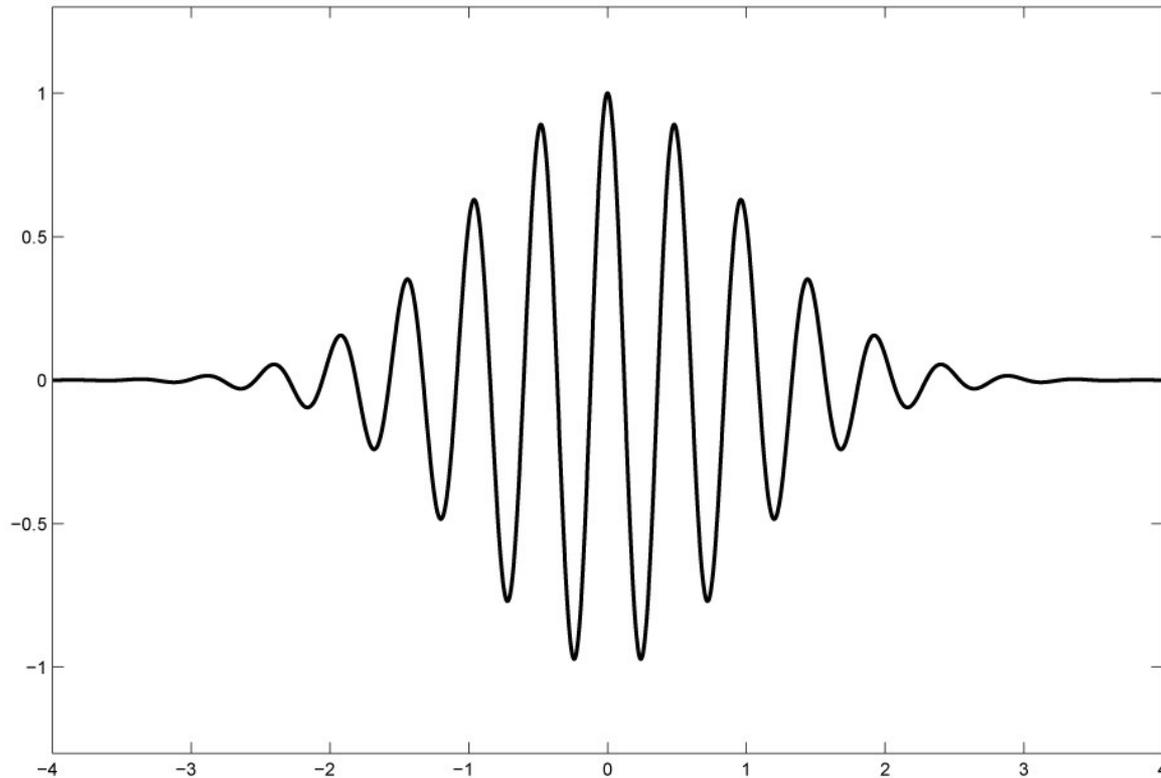


Пример 4. Вейвлет Морле:

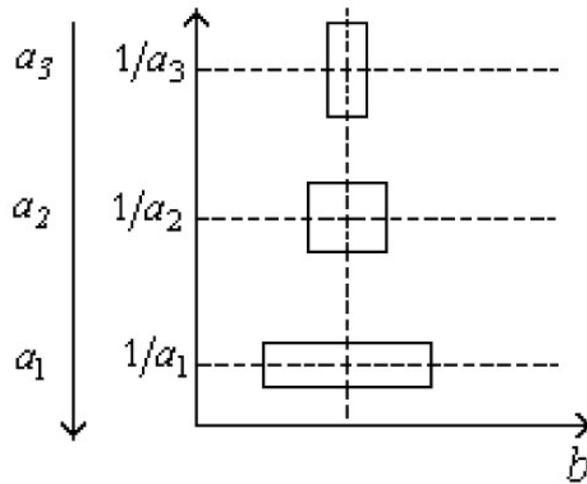
$$\psi(x) = e^{-x^2/2}(e^{i\omega_0 x} - e^{-\omega_0^2/2}), \quad \hat{\psi}(\omega) = e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} - e^{-(\omega^2+\omega_0^2)/2}.$$

Вейвлет Морле представляет собой плоскую волну, модулированную гауссианом. У вейвлета Морле равен нулю только нулевой момент.

На рисунке график вещественной части вейвлета Морле для $\omega_0 = 13$.



Вейвлет-преобразование имеет гибкое частотно-временное окно.



Если $\psi(x)$ заметно отлична от нуля лишь в некоторой окрестности начала координат, то $\psi_{a,b}(x)$ заметно отлична от нуля лишь в некоторой окрестности $x = b$. Окрестность сужается с уменьшением a .

Так как $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{a}\hat{\psi}(a\omega)e^{-ib\omega}$, если $\hat{\psi}(\omega)$ заметно отлична от нуля лишь в некоторой окрестности $\omega = \xi$, то $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ заметно отлична от нуля лишь в некоторой окрестности $\omega = \xi/a$.

Следовательно, $W_{\psi}f(a, b)$ измеряет компоненту сигнала f в окрестности точки b с частотной характеристикой, пропорциональной $1/a$.

Аналогично при рассмотрении вейвлет-рядов параметр k отвечает за положение частотно-временного окна во времени, а параметр j отвечает за положение окна в частотной области.



Дискретное вейвлет-преобразование

Пусть f задана в $x_m = m/N$ ($m = 0, \dots, N - 1$), где $N = 2^J$ для некоторого J , т.е. $f : f[0], f[1], \dots, f[N - 1]$.

В дискретном случае $\langle f, g \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]g[m]$.

Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) представляет собой набор коэффициентов

$$d_{j,k} \quad (j = 0, \dots, J - 1, k = 0, \dots, 2^j - 1),$$

полученный по формуле $d = Wf$,

где W – ортогональная матрица, удовлетворяющая

$$\sqrt{N}W_{(j,k),m} \approx \psi_{j,k}(m/N).$$

Для прямого и обратного ДВП требуется $O(N)$ операций.

Заметим, что из-за ортогональности матрицы W

$$d_{j,k} \approx \sqrt{N} \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$



Контрольные вопросы

1. Дать определение непрерывного вейвлет-преобразования.
2. Сформулировать условие допустимости вейвлет-функции.
3. Доказать инвариантность относительно сдвига непрерывного вейвлет-преобразования.
4. Доказать аналог формулы Планшереля для непрерывного вейвлет-преобразования.
5. Как связано непрерывное вейвлет-преобразование с коэффициентами разложения в вейвлет-ряд.
6. Дать определение непрерывного вейвлет-преобразование в 2-мерном случае при использовании вейвлет-функции, обладающей круговой симметрией.
7. Сколько нулевых моментов имеет WAVE-вейвлет?
8. Сколько нулевых моментов имеет вейвлет Морле?
9. Каким образом вейвлет-преобразование обеспечивает частотно-временную локализацию при анализе сигналов?
10. Как связаны между собой дискретные вейвлет-коэффициенты и коэффициенты разложения в вейвлет-ряд?



Прикладные задачи вейвлет-анализа

Основные практические задачи: компрессия данных, подавление шума и обнаружению сингулярностей.

Важную роль играет число нулевых моментов, т.е. M :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0 \quad k = 0, \dots, M - 1.$$

Рассмотрим, например, вейвлет-функцию Добеши $\psi_2(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi_2(x) dx \neq 0.$$

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема. Учитывая размер носителя $\psi_2(x)$:

$$b_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) 2^{j/2} \psi_2(2^j x - k) dx = \int_0^{3 \cdot 2^{-j}} f(x + 2^{-j} k) 2^{j/2} \psi_2(2^j x) dx$$

Если j достаточно велико, то интервал интегрирования мал, и $f(x + 2^{-j} k) \approx f(2^{-j} k) + x f'(2^{-j} k) + \frac{1}{2} x^2 f''(2^{-j} k)$. Тогда

$$b_{j,k} \approx \int_0^{3 \cdot 2^{-j}} (f(2^{-j} k) + x f'(2^{-j} k) + \frac{1}{2} x^2 f''(2^{-j} k)) \psi_2(2^j x) dx.$$

Учитывая равенство нулю двух моментов ψ_2 :

$$b_{j,k} \approx \frac{1}{16} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} 2^{-5j/2} f''(2^{-j} k).$$



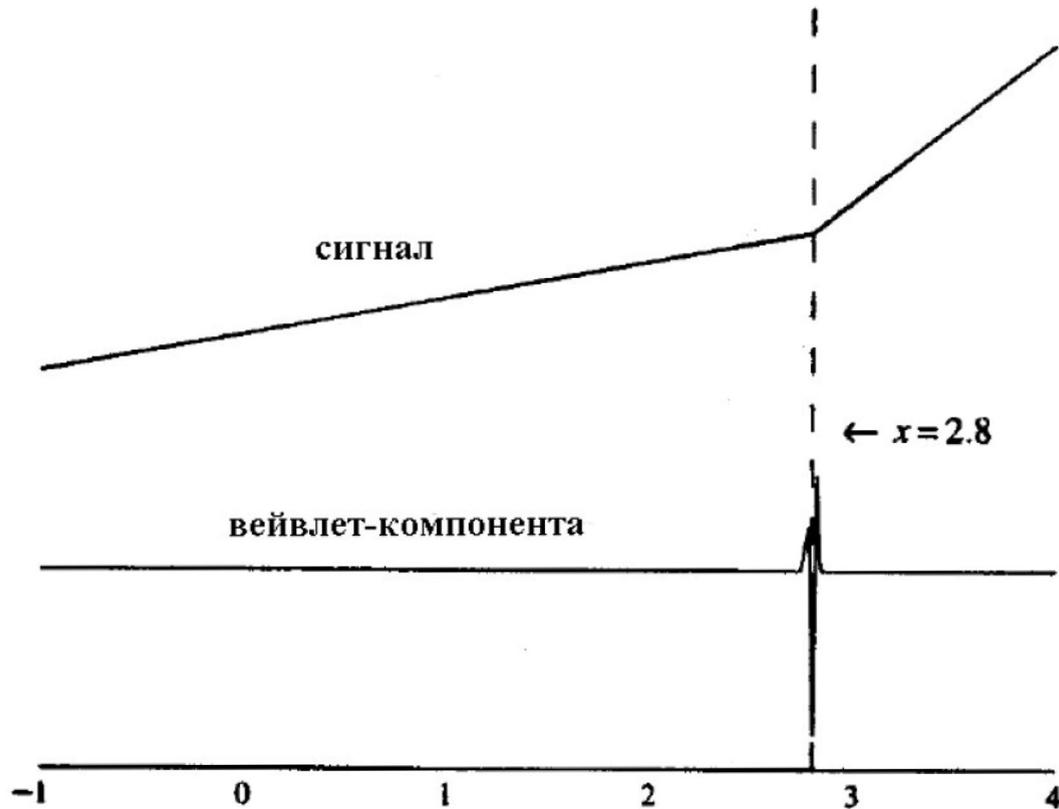
Пример (обнаружение сингулярности)

$$f(x) = \begin{cases} 0.37x + 1.37 & \text{при } x \in [-1, 2.8], \\ 1.58x - 2.03 & \text{при } x \in [2.8, 4]. \end{cases}$$

256 отсчетов, $j = 8$. Получим вейвлет-коэффициенты при $j = 7$.

$b_{7,97} = -0.01$, остальные имеют порядок 10^{-14} .

$k = 97$ соответствует $\psi_{7,97}$ с носителем на на отрезке $[2, 79, 2.83]$.



Методы подавления шума и сжатия данных

f – отсчеты сигнала: $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, $N = 2^J$.

$W = (W_0, W_1, \dots, W_{N-1})$ – белый шум, $W_i \sim N(0, \sigma^2)$.

$$X = f + W$$

Обозначим $X_{j,k} = \langle X, \psi_{j,k} \rangle$, $\mu_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, $\varepsilon_{j,k} = \langle W, \psi_{j,k} \rangle$.

$$X_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon_{j,k}, \quad \varepsilon_{j,k} \sim N(0, \sigma^2).$$

Рассмотрим оценку \tilde{f} сигнала f , вычисленную с помощью диагонального оператора D в дискретном базисе $\{\psi_{j,k}\}$.

D оценивает каждую компоненту сигнала $\mu_{j,k}$ по $X_{j,k}$ отдельно с помощью функций $d_{j,k}(x)$:

$$\tilde{f} = D[X] = \sum_{j,k} d_{j,k}(X_{j,k}) \psi_{j,k}.$$

Запишем функции $d_{j,k}$ в виде $d_{j,k}(X_{j,k}) = a_{j,k} X_{j,k}$, где $a_{j,k}$ могут зависеть от $X_{j,k}$ ($a_{j,k} \in [0, 1]$). Такой метод называется методом масштабирования коэффициентов.



$$r_D(f) = \mathbb{E} \|f - \tilde{f}\|^2 = \sum_{j,k} \mathbb{E} |\mu_{j,k} - d_{j,k}(X_{j,k})|^2.$$

Так как $X_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon_{j,k}$, $\mathbb{E}\varepsilon_{j,k} = 0$ и $\mathbb{E}|\varepsilon_{j,k}|^2 = \sigma^2$, то

$$\mathbb{E} |\mu_{j,k} - a_{j,k}X_{j,k}|^2 = |\mu_{j,k}|^2(1 - a_{j,k})^2 + \sigma^2 a_{j,k}^2.$$

Это выражение минимально при $a_{j,k} = \frac{|\mu_{j,k}|^2}{|\mu_{j,k}|^2 + \sigma^2}$, и

$$r_{D,inf}(f) = \sum_{j,k} \frac{|\mu_{j,k}|^2 \sigma^2}{|\mu_{j,k}|^2 + \sigma^2}.$$

В случае, когда D нелинейный, а $a_{j,k}$ принимают значения из $\{0, 1\}$, минимум достигается при

$$a_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } |\mu_{j,k}| \geq \sigma \\ 0, & \text{если } |\mu_{j,k}| < \sigma. \end{cases}$$

При этом минимальный риск равен

$$r_{inf}(f) = \sum_{j,k} \min(|\mu_{j,k}|^2, \sigma^2).$$

$$r_{inf}(f) \geq r_{D,inf}(f) \geq \frac{1}{2} r_{inf}(f).$$

Оператор D не может использоваться практически, так как $a_{j,k}$ зависит от $|\mu_{j,k}|$, значение которого неизвестно.



Определение. Жесткой пороговой обработкой (с порогом T) называется процедура оценивания сигнала, при которой пороговые функции $d_{j,k}$ определяются как

$$d_{j,k}(x) = d_T(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > T \\ 0, & \text{если } |x| \leq T. \end{cases}$$

Риск жесткой пороговой обработки равен

$$r_T(f) = \sum_{j,k} \mathbb{E} |\mu_{j,k} - d_T(X_{j,k})|^2,$$

где в силу того, что $X_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon_{j,k}$,

$$|\mu_{j,k} - d_T(X_{j,k})|^2 = \begin{cases} |\varepsilon_{j,k}|^2, & \text{если } |X_{j,k}| > T \\ |\mu_{j,k}|^2, & \text{если } |X_{j,k}| \leq T. \end{cases}$$

Следовательно,

$$r_T(f) \geq r_{inf}(f) = \sum_{j,k} \min(|\mu_{j,k}|^2, \sigma^2).$$



Определение. Мягкой пороговой обработкой (с порогом T) называется процедура оценивания сигнала, при которой пороговые функции $d_{j,k}$ определяются как

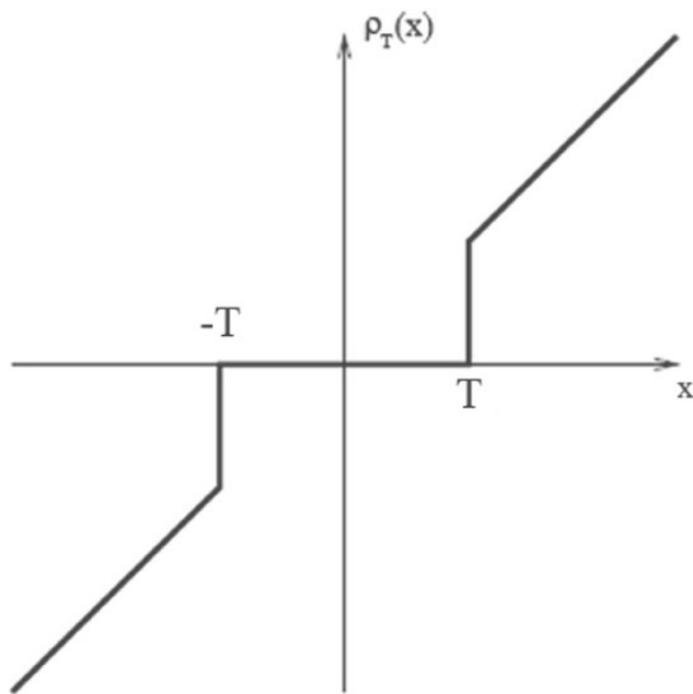
$$d_{j,k}(x) = d_T(x) = \begin{cases} x - T, & \text{если } x > T \\ x + T, & \text{если } x < -T \\ 0, & \text{если } |x| \leq T. \end{cases}$$

При жесткой пороговой обработке пороговые функции разрывны, а при мягкой непрерывны. Отсюда вытекают различия в полученных восстановленных сигналах.

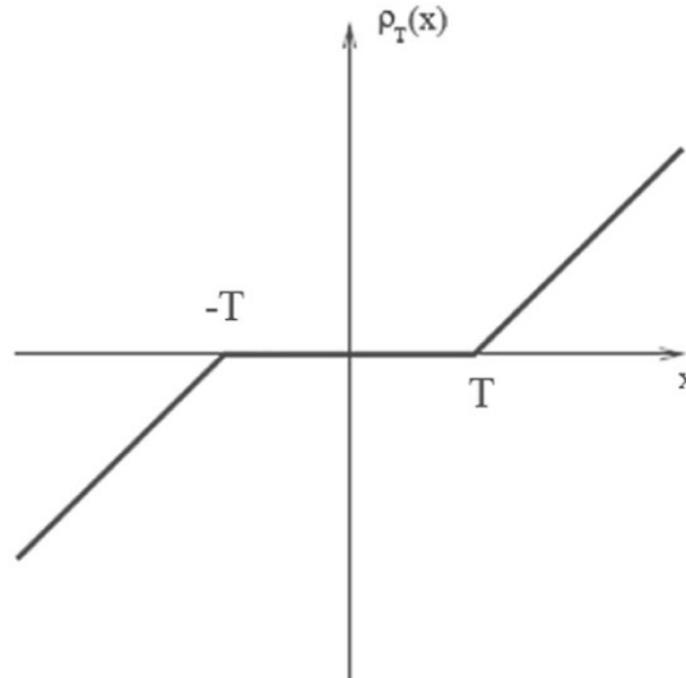
При жесткой пороговой обработке в оценке сигнала могут возникать артефакты (осциляции). Однако при мягкой пороговой обработке в оценке возникает дополнительное смещение.

Метод пороговой обработки является близким к оптимальному (в смысле минимизации риска) для широкого класса сигналов, зашумленных аддитивным гауссовским белым шумом.





(a)



(б)

а) функция жесткой пороговой обработки

б) функция мягкой пороговой обработки



Контрольные вопросы

1. Какую роль играет число нулевых моментов вейвлет-функции при обнаружении сингулярностей в исследуемой функции сигнала?
2. Что происходит с коэффициентами вейвлет-разложения функции сигнала в окрестности точки сингулярности?
3. Что такое диагональный оператор?
4. В чем заключается метод масштабирования коэффициентов?
5. Как определяется риск методов обработки сигналов?
6. Почему значение минимального риска на практике вычислить нельзя?
7. Дать определение жесткой пороговой обработки.
8. Дать определение мягкой пороговой обработки.
9. В чем заключаются достоинства и недостатки методов жесткой и мягкой пороговой обработки?



Методы выбора порога

Универсальный порог

Утверждение 1. Пусть z_1, \dots, z_n – независимые случайные величины, имеющие распределение $N(0, \sigma^2)$ и

$$A_n = \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > \sigma \sqrt{2 \log n} \right\},$$

тогда

$$P(A_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Более того, если

$$B_n = \left\{ \sigma \sqrt{2 \log n} - \frac{\sigma \log \log n}{\sqrt{\log n}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \leq \sigma \sqrt{2 \log n} \right\},$$

$$C_n(t) = \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| > \sigma t + \sigma \sqrt{2 \log n} \right\},$$

то $P(B_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, и $P(C_n(t)) < e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$T = \sigma \sqrt{2 \log n}$ – «универсальный» порог. Так как $P(A_n) \rightarrow 0$, оставшийся шум в сигнале будет незначительным. $P(B_n) \rightarrow 1$ означает, что максимальная амплитуда шума находится в окрестности универсального порога. А так как $P(C_n(t))$ экспоненциально убывает, нет смысла выбирать порог, превосходящий универсальный.

Универсальный порог зависит только от размера сигнала n и дисперсии шума σ^2 .

При выборе универсального порога риск и мягкой, и жесткой пороговой обработки близок к риску

$$r_{inf}(f) = \sum_{j,k} \min(|\mu_{j,k}|^2, \sigma^2),$$

что обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $T = \sigma\sqrt{2\log N}$, $N = 2^J$ – размер сигнала. Риск $r_T(f)$ мягкой или жесткой пороговой обработки удовлетворяет при всех $N \geq 4$ неравенству

$$r_T(f) \leq (2\log N + 1)(\sigma^2 + r_{inf}(f)).$$

Из теоремы 1 следует, что при выборе универсального порога риск пороговой обработки близок к минимальному с точностью до логарифмического множителя для любого сигнала с конечной энергией (из $L^2(R)$). Именно поэтому порог назван «универсальным».



На практике дисперсия шума σ^2 неизвестна.

Определение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Z_i = |X_i - \text{med}X|$, где med – выборочная медиана X . Тогда выборочное абсолютное медианное отклонение от медианы (Median Absolute Deviation) определяется как $MAD = \text{med}Z$.

Оценка MAD является одной из самых устойчивых к выбросам (робастной).

Утверждение 2. Пусть $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, и m – медиана абсолютного отклонения ξ от ее медианы, тогда $\frac{m}{\sigma} = C_{3/4}$, где $C_{3/4}$ – 3/4-квантиль $N(0, 1)$ ($C_{3/4} \approx 0,6745$).

Исходя из утверждения 2 обычно в качестве оценки σ выбирается $\hat{\sigma}$ выбирается величина

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0,6745} MAD,$$

где MAD строится по половине всех коэффициентов, расположенных на самом мелком масштабе вейвлет-разложения сигнала.

Эти рассуждения приводят к определению порога

$$T_U = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log N}.$$



SURE-порог

SURE (Stein Unbiased Risk Estimator) – несмещенная оценка риска

$$r_T(f) = \sum_{j,k} \mathbb{E} |\mu_{j,k} - d_T(X_{j,k})|^2.$$

Как разумно определить $\hat{r}_T(f)$?

Если $|X_{j,k}| \leq T$, то $d_T(X_{j,k}) = 0$, и вклад в риск равен $|\mu_{j,k}|^2$.

Это число можно оценить разностью $|X_{j,k}|^2 - \sigma^2$, так как

$$\mathbb{E}|X_{j,k}|^2 = |\mu_{j,k}|^2 + \sigma^2.$$

Если $|X_{j,k}| > T$, то $d_T(X_{j,k}) = X_{j,k} \pm T$ и вклад слагаемого равен

$$\mathbb{E}|X_{j,k} - \varepsilon_{j,k} - X_{j,k} \pm T|^2 = \sigma^2 + T^2.$$

Следовательно, риск мягкой пороговой обработки можно оценить следующим образом:

$$\hat{r}_T(f) = \sum_{j,k} F(|X_{j,k}|^2),$$

где

$$F(u) = \begin{cases} u - \sigma^2, & \text{если } |u| \leq T^2, \\ \sigma^2 + T^2, & \text{если } |u| > T^2. \end{cases}$$

Теорема 2. При мягкой пороговой обработке $\mathbb{E}\hat{r}_T(f) = r_T(f)$.

При жесткой пороговой обработке SURE-оценку построить нельзя.



Вычисление порога T_S , минимизирующего $\hat{r}_T(f)$

Упорядочим $X_{j,k}$ по убыванию амплитуды, и обозначим через X_k^r k -ую координату ранжированного вектора:

$$|X_k^r| \geq |X_{k+1}^r| \text{ при } 0 \leq k < N - 1.$$

Пусть l – такой индекс, что $|X_l^r| \leq T < |X_{l-1}^r|$.

Тогда оценку риска можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{r}_T(f) &= \sum_{m=0}^{l-1} F(|X_m^r|^2) + \sum_{m=l}^{N-1} F(|X_m^r|^2) = \sum_{m=0}^{l-1} (\sigma^2 + T^2) + \\ &+ \sum_{m=l}^{N-1} (|X_m^r|^2 - \sigma^2) = \sum_{m=l}^{N-1} |X_m^r|^2 - (N - l)\sigma^2 + l(\sigma^2 + T^2). \end{aligned}$$

$\hat{r}_T(f)$ при фиксированном l возрастает по T . Следовательно, положив $T = |X_l^r|$, найдем минимум получившегося выражения. Порог T_S , минимизирующий оценку $\hat{r}_T(f)$, ищется сравнением N значений $\hat{r}_T(f)$ в точках $T_m = |X_m^r|$, $0 \leq m \leq N - 1$. То значение $|X_m^r|$, на котором достигается минимум, принимается за T_S .



Так вычисленное значение порога не всегда подходит для обработки сигнала. Если энергия сигнала мала относительно энергии шума, т.е. $\|f\|^2 \ll E\|W\|^2 = N\sigma^2$, то значение T_S может быть очень маленьким и сигнал остается сильно зашумленным. В этом случае, чтобы удалить шум, выбирают универсальный порог $T = \sigma\sqrt{2\log N}$.

Так как $E\|X\|^2 = \|f\|^2 + N\sigma^2$, то $\|X\|^2 - N\sigma^2$ является несмещенной оценкой для энергии полезного сигнала $\|f\|^2$. Эта оценка энергии сигнала в дальнейшем сравнивается с величиной $\varepsilon_N = \sigma^2 N^{1/2}(\log N)^{3/2}$, называемой уровнем минимума энергии. Если она меньше этого уровня, значит шум перекрывает сигнал, и надо выбирать универсальный порог. Таким образом, порог определяется соотношениями

$$\tilde{T}_S = \begin{cases} \sigma\sqrt{2\log N}, & \text{если } \|X\|^2 - N\sigma^2 \leq \varepsilon_N \\ T_S, & \text{если } \|X\|^2 - N\sigma^2 > \varepsilon_N. \end{cases}$$



Пороговая обработка, инвариантная относительно сдвига

Сигнал f с периодом N в пространстве с дискретным вейвлет-базисом $\{\psi_{j,k}\}$.

f^p – сигнал, полученный в результате сдвига f на p единиц, т.е. $f_i^p = f_{i-p}$ для $i = 0, \dots, N - 1$.

f_ψ – вектор коэффициентов разложения f по дискретному базису $\{\psi_{j,k}\}$.

У векторов f_ψ^p и f_ψ координаты совершенно различные.

Пусть $f = (f_0, \dots, f_{N-1}, f_0, \dots)$, $f^{-1} = (f_1, \dots, f_0, f_1, \dots)$.

Тогда

$$f_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \neq \langle f^{-1}, \psi_{j,k} \rangle = f_{j,k}^{-1}.$$

То есть сигнал, восстановленный в результате пороговой обработки по коэффициентам $f_{j,k}^p$, не является сдвигом сигнала, восстановленного по коэффициентам $f_{j,k}$.



Койфман и Донохо предложили алгоритм, при котором оцениваются все сдвиги сигнала f , затем производится обратный сдвиг самих оценок и их усреднение.

При всех $0 \leq p < N$ оценка \tilde{f}^p сигнала f^p вычисляется с помощью пороговой обработки сдвинутых данных:

$$\tilde{f}^p = \sum_{j,k} d_T(X_{j,k}^p) \psi_{j,k},$$

где d_T – функция жесткой или мягкой пороговой обработки с порогом T .

Инвариантная относительно сдвига оценка получается сдвигом назад и усреднением этих оценок:

$$\tilde{f} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} (\tilde{f}^p)^{-p}.$$

Как видно, такая оценка требует в N раз больше вычислений, чем для стандартной пороговой оценки.



Контрольные вопросы

1. Дать определение универсального порога. Почему он называется универсальным?
2. По какой причине универсальный порог считается максимальным среди разумных пороговых значений?
3. Почему при оценивании дисперсии шума в сигнале необходимо использовать робастные оценки?
4. Какая оценка дисперсии шума чаще всего используется при вычислении значения универсального порога?
5. Дать определение SURE-порога.
6. Как вычисляется несмещенная оценка риска при мягкой пороговой обработке?
7. Как вычисляется значение порога, минимизирующего несмещенную оценку риска?
8. В каком случае использование SURE-порога оставляет слишком много шума в обрабатываемом сигнале?
9. К каким последствиям приводит отсутствие инвариантности относительно сдвига у дискретного вейвлет-преобразования?
10. Как вычисляется оценка сигнала, инвариантная относительно сдвига?



Обратные статистические задачи

В некоторых статистических задачах данные измеряются не напрямую, а после некоторого преобразования.

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N (N = 2^J),$$

X_i – наблюдаемые данные,

K – линейное преобразование (оператор),

f – функция, которую необходимо оценить,

ε_i – погрешности измерения, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ и независимы.

Подобные модели используются в компьютерной томографии, физике плазмы, физической химии, астрономии и многих других областях.

Часто нельзя оценить f , просто применив к данным X_i обратный оператор K^{-1} , поскольку такой оператор может не быть ограниченным линейным оператором.

Статистические задачи такого рода называются некорректно поставленными, и для их решения применяются методы регуляризации.



Сингулярное разложение

Если K^*K - компактный оператором, то сингулярным разложением (Singular Value Decomposition) называется

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \kappa_m^{-1} \langle Kf, h_m \rangle e_m,$$

e_m – собственные функции оператора K^*K ,

κ_m^2 – его собственные значения,

$$h_m = Ke_m / \|Ke_m\|.$$

«Важные» коэффициенты расположены в начале этого ряда. Для слагаемых выбираются весовые множители t_m , которые близки к 1 для малых m и к 0 для больших. Получается оконное сингулярное разложение.

Множители выбираются так, чтобы $\{t_m \kappa_m^{-1}\} \in l^2$.

Так как последовательность собственных значений K^*K стремится к нулю, использование весовых множителей необходимо для того, чтобы ряд не расходился.

Различный выбор весовых множителей t_m приводит к различным специальным типам регуляризации.



Сингулярное разложение – популярный инструмент. Оконное сингулярное разложение при надлежащем выборе весовых множителей позволяет строить асимптотически наилучшие в минимаксном смысле линейные оценки. Предполагается, что f имеет «экономное» представление в базисе собственных функций оператора K^*K , т.е. что лишь небольшое число коэффициентов в этом базисе являются «значимыми».

Этот базис определяется только преобразованием K и не принимает в расчет свойства самой функции f .

Эта особенность налагает ограничения. Например, для операторов интегрирования и дифференцирования соответствующие собственные функции образуют базис Фурье из синусов и косинусов. Ряды Фурье неэффективны для представления функций с разностью степенью регулярности в разных областях.



Контрольные вопросы

1. Какие особенности присущи обратным задачам?
2. Какие задачи называют корректно поставленными?
3. По каким причинам применение обратного оператора, как правило, невозможно?
4. Что такое сингулярное разложение?
5. Как осуществляется регуляризация при использовании сингулярного разложения?
6. Какие ограничения присущи сингулярному разложению?



Вейвлет-вейглет-разложение (Wavelet Vaguelette Decomposition)

$f \in L^2(\mathbb{R})$ представляется в виде ряда:

$$f = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

где $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$.

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$.

Нужно выразить $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ через Kf .

Для некоторых K существуют $\beta_{j,k}$: последовательность $\xi_{j,k} = \beta_{j,k} K \psi_{j,k}$ образует устойчивый базис, то есть существуют такие $0 < A \leq B < \infty$, что

$$A \sum_{j,k} c_{j,k}^2 \leq \left\| \sum_{j,k} c_{j,k} \xi_{j,k} \right\|^2 \leq B \sum_{j,k} c_{j,k}^2$$

для всех $\{c_{j,k}\} \in l^2$.

Функции $\xi_{j,k}$ получили название «вейглеты» (vaguelettes).



Вейглеты $\{\xi_{j,k}\}$ существует не для всех линейных K .

Линейное преобразование K однородно с показателем α :

$$K[f(a(x - x_0))] = a^{-\alpha}(Kf)[a(x - x_0)]$$

для любого x_0 и любого $a > 0$.

Оператор интегрирования, преобразование Абеля, преобразование Гильберта и некоторые виды свертки.

При $\alpha > 0$ задача обращения K некорректно поставлена. Если K однородно, то $\beta_{j,k} = \beta_{0,0}2^{\alpha j}$, а $\xi_{j,k}$, как и вейвлеты, представляют собой сдвиги и растяжения некоторой функции ξ , т.е. «вейглеты» $\xi_{j,k}$ – это «почти» вейвлеты.



Kf разлагается в ряд по вейглет-базису:

$$Kf = \sum_{j,k} \langle Kf, \eta_{j,k} \rangle \xi_{j,k},$$

где $\{\eta_{j,k}\}$ – двойственный вейглет-базис: $K^* \eta_{j,k} = \beta_{j,k}^{-1} \psi_{j,k}$.

Базисы $\{\xi_{j,k}\}$ и $\{\eta_{j,k}\}$ биортогональны. Базис $\{\eta_{j,k}\}$ также устойчивый и образуется сдвигами и растяжениями η .

С помощью базиса $\{\eta_{j,k}\}$ f можно представить в виде

$$f = \sum_{j,k} \beta_{j,k} \langle Kf, \eta_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Коэффициенты выражаются не через f , а через Kf .

Эта формула является основой метода вейвлет-вейглет-разложения. При таком подходе учитывается не только вид K , но и свойства f .



Примеры

Пример 1. Интегрирование. $Kf(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$

Для того, чтобы можно было применить вейвлет-вейглет-разложение, функция ψ должна удовлетворять условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega)|^{-2} |\omega|^2 d\omega < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^2 d\omega < \infty,$$

т.е. производная и интеграл от ψ должны лежать в $L^2(\mathbb{R})$.

В этом случае

$$\xi_{j,k}(x) = \beta_{j,k} \int_{-\infty}^x \psi_{j,k}(t)dt, \quad \eta_{j,k}(x) = -\beta_{j,k}^{-1} \psi'_{j,k}(x),$$

где $\beta_{j,k} = \beta_{0,0} 2^j$, $\beta_{0,0} = \|\eta\|$.

Биортогональность вейглет-базисов:

$$\langle \xi_{j,k}, \eta_{i,m} \rangle = \langle \psi_{j,k}, \psi_{i,m} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } (j, k) = (i, m), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\beta_{j,k} \asymp 2^j$ – степень некорректности задачи обращения.



Пример 2. Дробное интегрирование.

Пусть $H(t)$ однородна с показателем 0:

$$H(at) = H(t) \text{ при любом } a > 0.$$

$$Kf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{H(t-x)}{|t-x|^{1-\alpha}} dt, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Для функции Хевисайда $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$

и $\alpha = \frac{1}{2}$ получается преобразование Абеля.

$$\widehat{Kf}(\omega) = |\omega|^{-\alpha} \widehat{H}(\omega) \widehat{f}(\omega).$$

Необходимые условия на ψ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^{2\alpha} |\omega|^{-2\alpha} d\omega < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\omega) \right|^{2\alpha} |\omega|^{2\alpha} d\omega < \infty.$$



По формуле Планшереля ($\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$)

из соотношения $\beta_{j,k}\langle Kf, \eta_{j,k} \rangle = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ получаем

$$\beta_{j,k}\widehat{\eta}_{j,k}(\omega) |\omega|^{-\alpha} \widehat{H}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \widehat{\psi}_{j,k}(\omega)\widehat{f}(\omega).$$

Следовательно, формально

$$\widehat{\eta}_{j,k}(\omega) = \widehat{\psi}_{j,k}(\omega) |\omega|^{\alpha} \beta_{j,k}^{-1} \widehat{H}^{-1}(\omega).$$

Чтобы $\eta_{j,k}$ и $\xi_{j,k}$ принадлежали $L^2(R)$, достаточно чтобы ψ имела компактный носитель, два нулевых момента и две непрерывные производные.

Биортогональность вейглет-базисов:

$$\langle \xi_{j,k}, \eta_{i,m} \rangle = \langle \psi_{j,k}, \psi_{i,m} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } (j, k) = (i, m), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для дробного интегрирования $\beta_{j,k} = \beta_{0,0}2^{\alpha j}$, $\beta_{0,0} = \|\eta\|$.

При разных α получается разная степень некорректности задачи обращения. Например, для $\alpha = 1/2$, соответствующего преобразованию Абеля, получается меньшая степень некорректности, чем для интегрирования ($\alpha = 1$).



Контрольные вопросы

1. Дать определение устойчивого базиса.
2. Дать определение линейного однородного оператора.
3. При каких значениях показателя однородности задача обращения линейного однородного оператора является некорректно поставленной?
4. Как выражаются вейглеты через соответствующие вейвлеты?
5. Дать определение биортогональности базисов.
6. Описать метод вейвлет-вейглет-разложения.
7. Какими преимуществами обладает метод вейвлет-вейглет-разложения по сравнению с оконным сингулярным разложением?
8. Как можно численно охарактеризовать степень некорректности задачи обращения линейного однородного оператора?



Локальное обращение

Некоторые виды линейных однородных операторов (например, преобразование Абеля) не допускают локального обращения: для вычисления значений функции f в некоторой окрестности необходимы все значения функции Kf .

Однако часто полезная информация содержится в высокочастотных и короткоживущих компонентах сигнала, соответствующих «большим» значениям j в представлении

$$f = \sum_{j,k} \beta_{j,k} \langle Kf, \eta_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Если ψ достаточно регулярна и имеет «большое» число нулевых моментов, то η «достаточно быстро» убывает на бесконечности. Таким образом, при больших j (когда $\eta_{j,k}$ уже «сильно» сжаты) для точного вычисления $\langle Kf, \eta_{j,k} \rangle$ требуются значения Kf только из той окрестности, которая представляет интерес, и для вычисления высокочастотной компоненты f в этой окрестности следует производить суммирование при «больших» j и только по тем k , для которых $\psi_{j,k}$ «заметно» отличны от нуля в этой окрестности.



Вейглет-вейвлет-разложение (Vaguelette Wavelet Decomposition)

В ряд по $\psi_{j,k}$ раскладывается не f , а Kf :

$$Kf = \sum_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Пусть $\beta_{j,k} = \|K^{-1}\psi_{j,k}\| = \beta_{0,0}2^{\alpha j}$.

Функция f представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k},$$

где $u_{j,k} = K^{-1}\psi_{j,k}/\beta_{j,k}$ («вейглеты»).

Утверждение. Пусть существуют такие константы $A_i > 0$,

$a_i > 0$ и $b_i > 1$, $i = 1, 2$, что для всех $\omega \in \mathbb{R}$

$$\left| \widehat{K^{-1}\psi}(\omega) \right| \leq A_1 |\omega|^{a_1} (1 + |\omega|^2)^{-(b_1+a_1)/2},$$

$$\left| \widehat{K^*\psi}(\omega) \right| \leq A_2 |\omega|^{a_2} (1 + |\omega|^2)^{-(b_2+a_2)/2}.$$

Тогда $\{u_{j,k}\}$ образует устойчивый базис в $L^2(\mathbb{R})$.



Особенности методов подавление шума

Вейвлет-вейглет-разложение (WVD)

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N (N = 2^J),$$

Здесь $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ и независимы.

Kf умножается на матрицу V , которая не ортогональна.

$$Y_{j,k} = \nu_{j,k} + z_{j,k},$$
$$\nu_{j,k} \approx \sqrt{N} \beta_{j,k} \langle Kf, \eta_{j,k} \rangle,$$

а $z_{j,k} \sim N(0, \sigma_j^2)$, где $\sigma_j^2 = \sigma^2 \beta_{j,k}^2 = \sigma^2 \beta_{0,0} 2^{2\alpha j}$.

Дисперсия шума растет со скоростью $2^{2\alpha j}$, что является следствием некорректности задачи обращения K .

Кроме того, дисперсия также зависит от ψ .

Случайные величины $z_{j,k}$ уже не являются независимыми. Порог также выбирается зависимым от j . Например, универсальный порог для каждого j вычисляется по формуле

$$T_j = \sigma_j \sqrt{2 \log N}.$$



Вейглет-вейвлет-разложение (VWD)

Kf умножается на ортогональную матрицу W .

$$Y_{j,k} = \nu_{j,k} + z_{j,k},$$
$$\nu_{j,k} \approx \sqrt{N} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle,$$

а $z_{j,k} \sim N(0, \sigma_j^2)$, где $\sigma_j^2 = \sigma^2 \beta_{j,k}^2 = \sigma^2 \beta_{0,0} 2^{2\alpha j}$.

Здесь случайные величины $z_{j,k}$ независимыми.

Порог зависит от j (универсальный порог $T_j = \sigma_j \sqrt{2 \log N}$).

Риск в обоих методах имеет одинаковый порядок.

Можно предварительно нормировать коэффициенты разложения (поделить на $\beta_{j,k}$). Тогда при пороговой обработке используется один порог на всех масштабах j .

Универсальный порог $T = \sigma^2 \beta_{0,0} \sqrt{2 \log N}$.



Контрольные вопросы

1. Что означает отсутствие возможности локального обращения линейного однородного оператора?
2. Как решается задача локальной реконструкции высокочастотных компонент функции сигнала методом вейвлет-вейглет-разложения?
3. Чем отличается метод вейглет-вейвлет-разложения от метода вейвлет-вейглет-разложения?
4. Какими особенностями обладает метод удаления шума при помощи пороговой обработки коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения?
5. Какими особенностями обладает метод удаления шума при помощи пороговой обработки коэффициентов вейглет-вейвлет-разложения?



Задачи вычислительной томографии

Томография – получение изображения внутренней структуры исследуемого объекта

Области применения:

Медицинская томография

Промышленная томография (обнаружение дефектов продукции)

Томография макрообъектов (атмосфера, планеты, звезды)

Используется излучение различной природы: ультразвук, радиоволны, оптические сигналы, рентгеновские лучи, гамма-лучи и т.д.

В зависимости от вида томографического эксперимента используются разные математические модели, в основном основанные на интегральных преобразованиях.

Существует масса различных алгоритмов реконструкции томографических изображений.



Преобразование Радона

$f(x, y)$ с компактным носителем описывает изображение.

$L_{\varphi, s}$ – прямая, которая задается уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0,$$

где s – расстояние от начала координат до прямой $L_{\varphi, s}$,
а φ – угол, образованный с осью x перпендикуляром,
опущенным из начала координат на эту прямую.

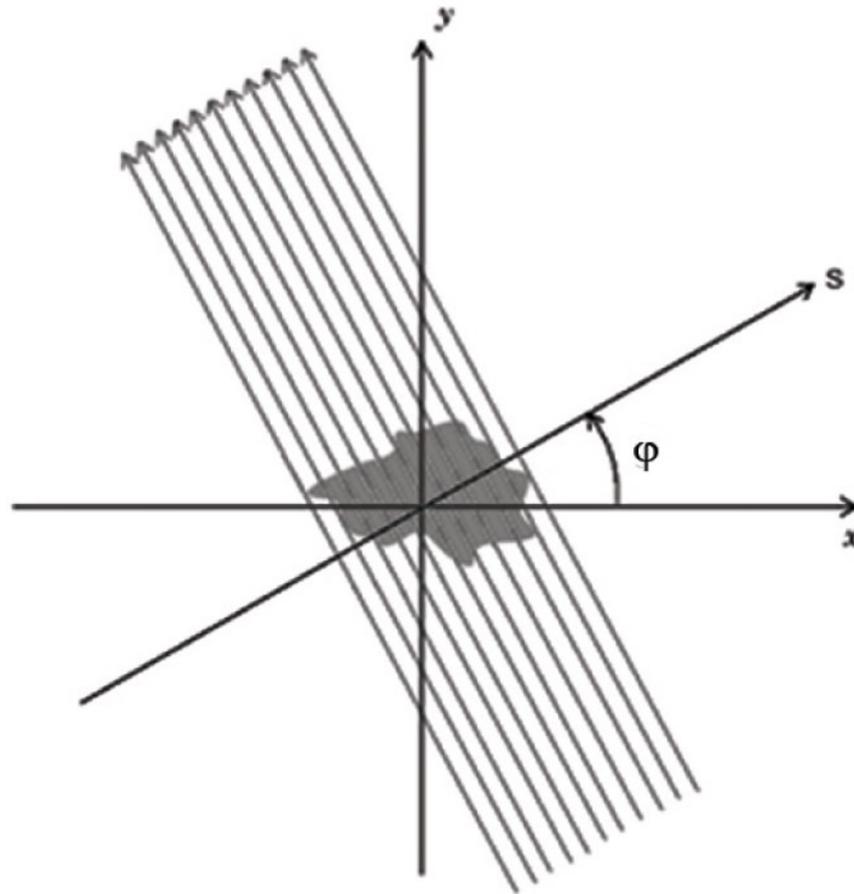
Преобразование Радона:

$$Rf(\varphi, s) = \int_{L_{\varphi, s}} f(x, y) dl = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - t \sin \varphi, s \sin \varphi + t \cos \varphi) dt,$$
$$s \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi).$$

При фиксированном φ функцию $Rf(\varphi, s)$ называют проекцией функции $f(x, y)$ под углом φ .

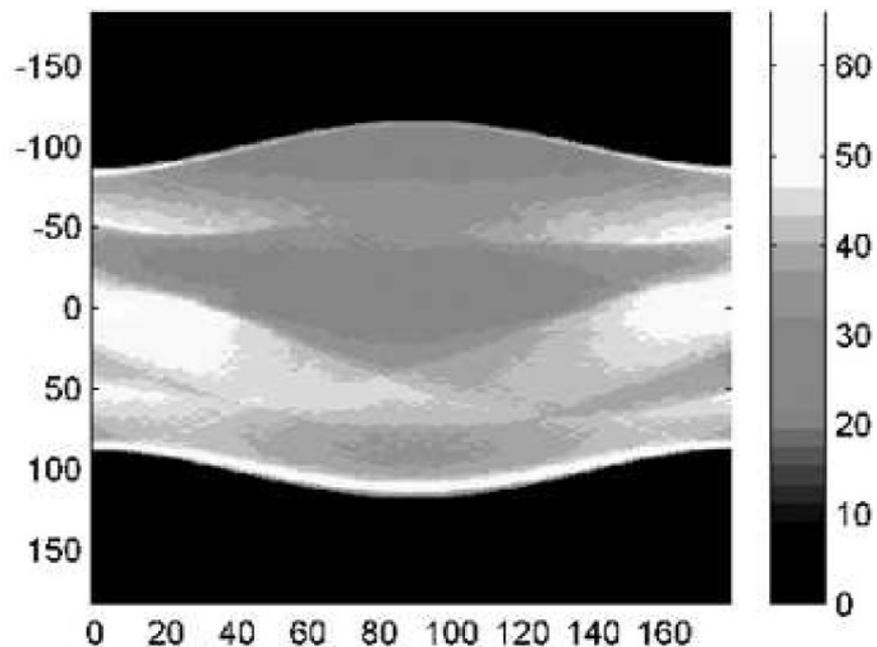
Задача состоит в обращении Rf и нахождении f .





Параллельная схема сканирования





Фантом Шеппа-Логана и его преобразование Радона



$$Rf(\varphi + \pi, -s) = Rf(\varphi, s),$$

поскольку (φ, s) и $(\varphi + \pi, -s)$ задают одну и ту же прямую. Это свойство позволяет перейти от области

$$s \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi) \text{ к } s \in R, \varphi \in [0, \pi),$$

которая более удобна для приложений.

Теорема 1 (о центральном сечении). Если существуют нижеследующие интегралы, то при любых φ

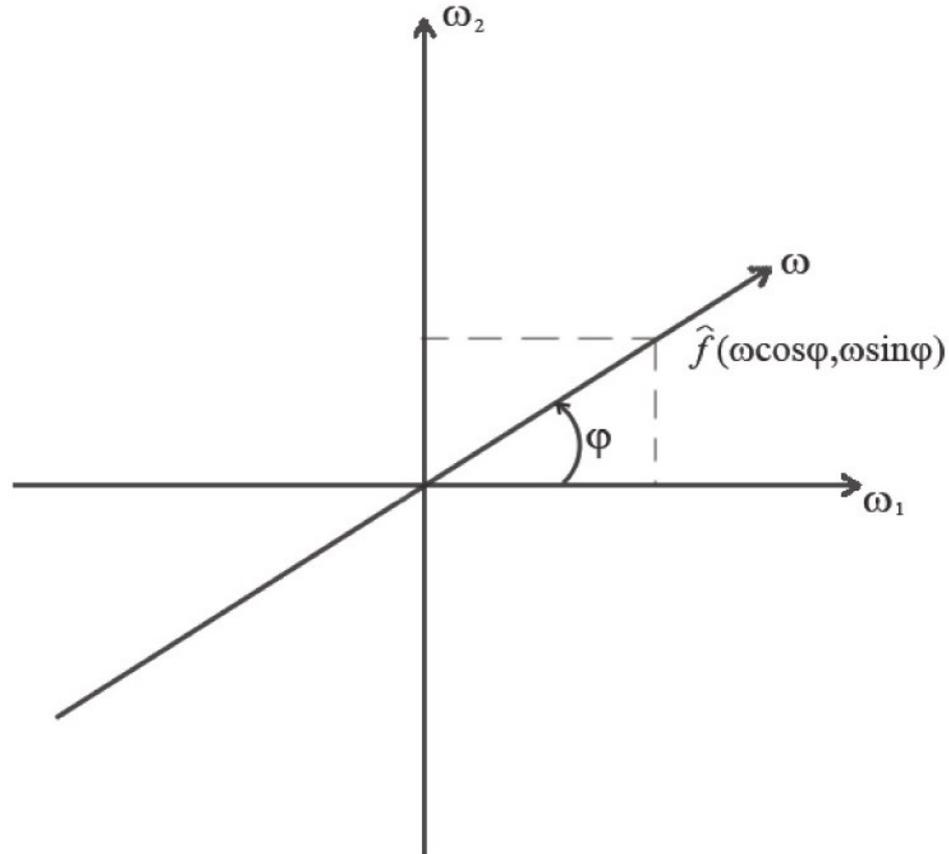
$$\widehat{Rf}(\varphi, \omega) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi),$$

где

$$\widehat{Rf}(\varphi, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s) e^{-is\omega} ds,$$

$$\widehat{f}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy$$





Теорема о центральном сечении: связь между преобразованиями Фурье функции изображения и ее проекции.



Теорема 2 (обобщенная проекционная теорема). Пусть $w(s)$ – произвольная функция, для которой существуют нижеследующие интегралы, тогда при любых φ

$$\int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s)w(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)w(x \cos \varphi + y \sin \varphi)dy,$$

Следствия:

1. Пусть $w(s) = 1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx dy.$$

2. Пусть $w(s) = s^m$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s)s^m ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^m dx dy = \\ &= \sum_{n=0}^m (a_{m,n} \cos n\varphi + b_{m,n} \sin n\varphi). \end{aligned}$$



Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная задача томографии?
2. Дать определение преобразования Радона.
3. Вычислить преобразование Радона функции, равной единице в круге единичного радиуса с центром в начале координат, и нулю за его пределами.
4. Что такое параллельная схема сканирования?
5. Доказать теорему о центральном сечении.
6. Почему теорема о центральном сечении так называется?
7. Что такое момент проекции и какими свойствами он обладает?



Формулы обращения и алгоритмы реконструкции

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2.$$

Замена $\omega_1 = \omega \cos \varphi$, $\omega_2 = \omega \sin \varphi$:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \widehat{f}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega.$$

По теореме о центральном сечении

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \omega \widehat{Rf}(\varphi, \omega) e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega.$$

Используя симметричность $\widehat{Rf}(\varphi, \omega) = \widehat{Rf}(\varphi + \pi, -\omega)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \widehat{Rf}(\varphi, \omega) e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega.$$



Алгоритм Фурье-синтеза

1. По теореме о центральном сечении

$$\widehat{Rf}(\varphi, \omega) \rightarrow \widehat{f}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi).$$

2. Из полярной системы координат переходим в декартову

$$\widehat{f}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \rightarrow \widehat{f}(\omega_1, \omega_2).$$

3. Обратное преобразования Фурье: $\widehat{f}(\omega_1, \omega_2) \rightarrow f(x, y)$.

Достоинство алгоритма Фурье-синтеза: на шаге 3 возможно применение быстрого преобразования Фурье, что увеличивает скорость его работы (при обработке изображения размером $N \times N$ сложность равна $O(N^2 \log N)$).

Однако на шаге 2 при численной реализации необходимо производить интерполяцию при переходе от полярной сетки к декартовой, что приводит к потере точности.



Алгоритм фильтрации и обратного проецирования

Формально определим $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{ramp-фильтр: } \widehat{h}(\omega) = |\omega|).$$

1. Фильтрация проекций:

$$\widetilde{Rf}(\varphi, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, t) h(s - t) dt.$$

2. Обратное проецирование:

$$\widetilde{Rf}(\varphi, s) \rightarrow \widetilde{Rf}(\varphi, x \cos \varphi + y \sin \varphi).$$

3. Суммирование обратных проекций:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \widetilde{Rf}(\varphi, x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi.$$

Вместо преобразования Фурье проекций участвуют сами проекции. Этот алгоритм требует больше вычислений, чем алгоритм Фурье-синтеза (при обработке изображения размером $N \times N$ сложность равна $O(N^3)$), однако является более точным, так как не нужна интерполяция.



Линейная регуляризация формул обращения

Проекционные данные с шумом:

$$Rf_e(\varphi, s) = Rf(\varphi, s) + n(s, \varphi).$$

Идея линейной регуляризации - подавить высокие частоты, которые считаются шумом.

Для этого в фильтр вводится множитель $W_\alpha(|\omega|)$.

Регуляризированные формулы обращения:

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty |\omega| W_\alpha(|\omega|) \widehat{Rf}(\varphi, \omega) e^{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} d\omega.$$

или

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty Rf_e(\varphi, s) h_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds,$$

$$\text{где } h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty W_\alpha(|\omega|) |\omega| e^{i\omega t} d\omega.$$



Стабилизирующий множитель $W_\alpha(|\omega|)$.

$$W_0(|\omega|) = 1 \text{ при } \alpha = 0.$$

$$W_\alpha(|\omega|) \sim 1 \text{ при } |\omega| \sim 0, \text{ и } W_\alpha(|\omega|) \sim 0 \text{ при } |\omega| \rightarrow \infty.$$

Примеры.

1. $W_\alpha(|\omega|) = e^{-\alpha|\omega|}$ – Гауссово окно.

2. $W_\alpha(|\omega|) = e^{-\alpha^2(|\omega|^2)/2}$ – экспоненциальное окно.

3. $W_\alpha(|\omega|) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\omega| \leq 1/\alpha \\ 0, & \text{если } |\omega| > 1/\alpha. \end{cases}$ – прямоугольное окно.

4. $W_\alpha(|\omega|) = \frac{|\omega|^{-2}}{|\omega|^{-2} + \alpha|\omega|^{2p}}$ – полиномиальное окно порядка p .



Контрольные вопросы

1. Вывести формулу обращения преобразования Радона на основе теоремы о центральном сечении.
2. Описать алгоритм Фурье-синтеза.
3. Описать алгоритм фильтрации и обратного проецирования.
4. В чем заключаются достоинства и недостатки алгоритма фильтрации и обратного проецирования и алгоритма Фурье-синтеза?
5. Для чего в формулы обращения вводится стабилизирующий множитель?
6. За что отвечает параметр стабилизации?
7. Какими общими свойствами обладает стабилизирующий множитель?



Статистическое описание изображений

Основные статистические характеристики:

Математическое ожидание: $E f_{\alpha}(x, y) \neq f(x, y)$

Дисперсия: $\sigma_{\alpha}^2(x, y) = E(f_{\alpha}(x, y) - E f_{\alpha}(x, y))^2$

Ковариационная функция:

$$K_{\alpha}(x_1, y_1, x_2, y_2) = E(f_{\alpha}(x_1, y_1) - E f_{\alpha}(x_1, y_1))(f_{\alpha}(x_2, y_2) - E f_{\alpha}(x_2, y_2))$$

Коэффициент корреляции:

$$k_{\alpha}(x_1, y_1, x_2, y_2) = K_{\alpha}(x_1, y_1, x_2, y_2) / (\sigma_{\alpha}(x_1, y_1) \sigma_{\alpha}(x_2, y_2))$$



Для однородного случайного поля

$$K_\alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) = K_h(x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Пространственный спектр:

$$\hat{K}_h(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy.$$

Однородные поля, у которых K_h зависит только от $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, называются изотропными.

В этом случае

$$K_\alpha(x_1, y_1, x_2, y_2) = K_i(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \omega \hat{K}_i(\omega) J_0(\omega r) d\omega,$$

где $J_0(b)$ функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка:

$$J_0(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ib \cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$$

Функция $K_i(r)$ с ростом r убывает.



Для изотропного поля можно ввести эффективный радиус корреляции: такое r_k , что $K_i(r_k)$ становится значительно меньше дисперсии σ_α^2 (дисперсия однородного изотропного случайного поля не зависит от x, y).

Часто эффективный радиус корреляции определяется как

$$r_k = \int_0^{\infty} K_i(r) dr / \sigma_\alpha^2 = \int_0^{\infty} k_i(r) dr.$$

Примерами ковариационной функции однородного изотропного случайного поля могут служить гауссовская и экспоненциальная функции:

$$K_i(r) = \sigma_\alpha^2 \exp(-r^2/2l^2),$$

$$K_i(r) = \sigma_\alpha^2 \exp(-r/l).$$

У гауссовской ковариационной функции $r_k = l\sqrt{\pi/2}$.

У экспоненциальной ковариационной функции $r_k = l$.



Критерии качества изображений

1. Отношение сигнал-шум

$$q_n(x, y) = \frac{E f_\alpha(x, y)}{\sigma_\alpha(x, y)}.$$

2. Среднеквадратичное отклонение

$$\Delta^2(x, y) = \frac{E(f_\alpha(x, y) - f(x, y))^2}{f^2(x, y)}$$

3. Проинтегрированное среднеквадратичное отклонение

$$\Delta^2 = \frac{\frac{1}{S} \iint_{\Omega} E(f_\alpha(x, y) - f(x, y))^2 dx dy}{\left[\frac{1}{S} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \right]^2},$$

где S – площадь Ω (области изображения).



Вводя обозначения

$$\Delta_n^2(x, y) = \sigma_\alpha^2(x, y) / f^2(x, y),$$

$$\Delta_\alpha^2(x, y) = (f(x, y) - Ef_\alpha(x, y))^2 / f^2(x, y),$$

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{S} \iint_{\Omega} \sigma_\alpha^2(x, y) dx dy / \left[\frac{1}{S} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \right]^2,$$

$$\Delta_\alpha^2 = \frac{\frac{1}{S} \iint_{\Omega} (f(x, y) - Ef_\alpha(x, y))^2 dx dy}{\left[\frac{1}{S} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \right]^2},$$

получаем

$$\Delta^2(x, y) = \Delta_n^2(x, y) + \Delta_\alpha^2(x, y),$$

$$\Delta^2 = \Delta_n^2 + \Delta_\alpha^2.$$

Первое слагаемое в этих суммах дает оценку случайных отклонений от среднего изображения, второе определяет отклонение среднего изображения от истинного.

Критерии качества, использующие значения q_n , $\Delta^2(x, y)$ и Δ^2 , можно рассчитать, если известен вид изображения.



Контрольные вопросы

1. Какие основные характеристики используются для статистического описания томографических изображений?
2. Какое случайное поле называется однородным?
3. Как определяется пространственный спектр однородного поля?
4. Какое случайное поле называется изотропным?
5. Что такое эффективный радиус корреляции?
6. Вычислить эффективный радиус корреляции для гауссовской ковариационной функции.
7. Что такое отношение сигнал/шум?
8. Дать определения среднеквадратичного отклонения и проинтегрированного среднеквадратичного отклонения.
9. Доказать представление $\Delta^2(x, y) = \Delta_n^2(x, y) + \Delta_\alpha^2(x, y)$ для среднеквадратичного отклонения.



Модель с аддитивным шумом

$$Rf_e(\varphi, s) = Rf(\varphi, s) + n(\varphi, s),$$

$n(\varphi, s)$ – однородная случайная функция

$$En(\varphi, s) = 0, K_n(s_1 - s_2, \varphi_1 - \varphi_2) = K(s_1 - s_2)\delta(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Спектральная плотность шума $\widehat{K}(\omega)$:

$$K(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{K}(\omega) e^{i\omega s} d\omega.$$

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} Rf_e(\varphi, s) h_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds,$$

где $h_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| W_\alpha(|\omega|) e^{i\omega t} d\omega.$

Среднее изображение:

$$Ef_\alpha(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, s) h_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds,$$

Шумовое изображение:

$$f_n(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} n(\varphi, s) h_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds.$$



$E f_n(x, y) = 0$, дисперсия шумового изображения равна

$$\sigma_\alpha^2(x, y) = E f_n^2(x, y) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \omega^2 W_\alpha^2(|\omega|) \hat{K}(\omega) d\omega.$$

1. Дисперсия не зависит от вида восстанавливаемого изображения.
2. Дисперсия не зависит от конкретной точки (x, y) изображения.
3. Чем большую роль в алгоритме играет стабилизирующий множитель $W_\alpha(|\omega|)$ (чем больше он подавляет высокие частоты), тем меньше дисперсия.



Ковариационная функция шумового изображения равна

$$K_{\alpha}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \omega^2 W_{\alpha}^2(|\omega|) \widehat{K}(\omega) J_0(\omega\rho) d\omega,$$

где $\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

а $J_0(\rho)$ – функция Бесселя 1-го рода 0-го порядка.

Ковариационная функция определяется только значением ρ . Такая зависимость характерна для однородного изотропного случайного поля.

Как и для дисперсии, эту формулу можно использовать лишь приближенно в той части изображения, которая находится достаточно далеко от его границы.



Контрольные вопросы

1. Почему в модели искаженных проекционных данных обычно считается, что шумы некоррелированы по углу?
2. Зависит ли среднее изображение от характеристик шума в аддитивной модели?
3. Почему дисперсия шумового изображения не зависит от вида восстанавливаемой функции?
4. При каких предположениях дисперсия шумового изображения не зависит от координат точки, в которой она вычисляется?
5. Как влияет стабилизирующий множитель на спектр аддитивных шумов?



Неполные данные. Проблемы реконструкции.

Изображения описываются классом интегрируемых функций с компактным носителем. В этом классе преобразования Фурье функций принадлежат классу вещественных аналитических функций в R^2 .

Лемма. Пусть $f(z, w)$ и $g(z, w)$, $z, w \in C$, — две комплексные функции комплексных переменных, каждая из которых аналитична в C^2 , и пусть l_1, l_2, \dots — последовательность различающихся прямых, принадлежащих действительной плоскости R^2 и проходящих через начало координат. Если $f(z, w)$ и $g(z, w)$ совпадают на множестве

$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} l_i$, то они совпадают для всех $(z, w) \in C^2$.



Теорема 1. Объект однозначно определяется любым бесконечным набором своих проекций.

Ограниченная область значений углов обзора.

Проекции $Rf(\varphi, s)$ доступны только для диапазона углов $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, где $|\varphi_2 - \varphi_1| < \pi$.

Из теоремы 1 следует, что f однозначно определяется проекциями с ограниченной областью значений углов обзора. Проблема заключается в отсутствии устойчивости.

Из теоремы о центральном сечении следует, что в данном случае преобразование Фурье $\hat{f}(\omega_1, \omega_2)$ определено в конусе $\{\omega_1 = \rho \cos \varphi, \omega_2 = \rho \sin \varphi : \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], \rho \in R\}$.

Восстановление f таким образом эквивалентно построению аналитического продолжения \hat{f} , а задача аналитического продолжения является сильно неустойчивой.



Конечный набор проекций.
Парадокс вычислительной томографии.

Теорема 2. Пусть объект описывается бесконечно дифференцируемой функцией f_0 с компактным носителем. Пусть известны проекции этого объекта по конечному числу направлений. Тогда существует другой объект, описываемый бесконечно дифференцируемой функцией f , имеющий ту же форму, те же проекции по данным направлениям, что и первый объект, и совершенно произвольную структуру на любом компактном множестве, принадлежащем носителю f_0 .

Теорема 2'. Конечный набор проекционных данных ничего не говорит об объекте.



Парадокс Шеппа.

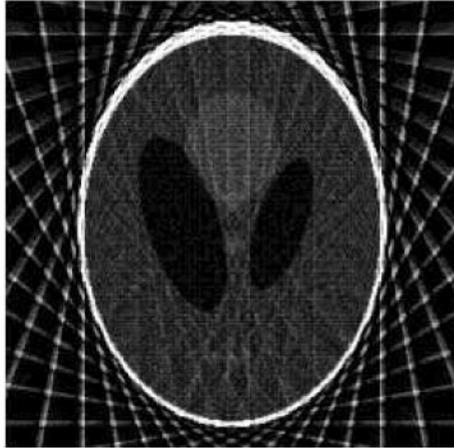
Пусть $f(x, y)$ – плотность вероятностного распределения с компактным носителем $G \subset R^2$.

Пусть $\theta_1, \dots, \theta_N$ – N направлений на плоскости R^2 .

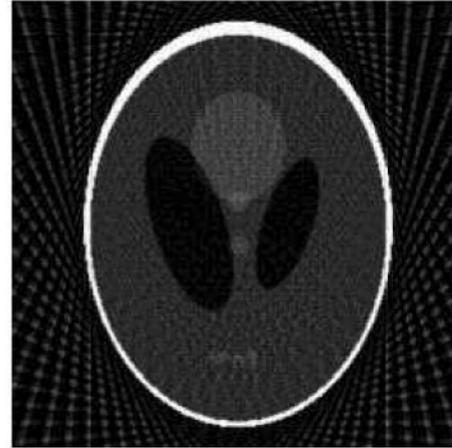
Для любой плотности $f : 0 \leq f(x, y) \leq 1, (x, y) \in G$, и для любого конечного числа направлений $\theta_1, \dots, \theta_N$, существует еще одна плотность $f_0(x, y), (x, y) \in G$, такая что f_0 имеет те же проекции по направлениям $\theta_1, \dots, \theta_N$, что и f , и принимает всего два значения: 0 или 1.

Все функции $f(x, y)$ с нулевыми проекциями по данному конечному набору направлений («фантомы») являются сильно осциллирующими. Следовательно, для того чтобы уменьшить уровень неопределенности в случае конечного числа проекций, необходимо наложить ограничение на вариацию функции $f(x, y)$.

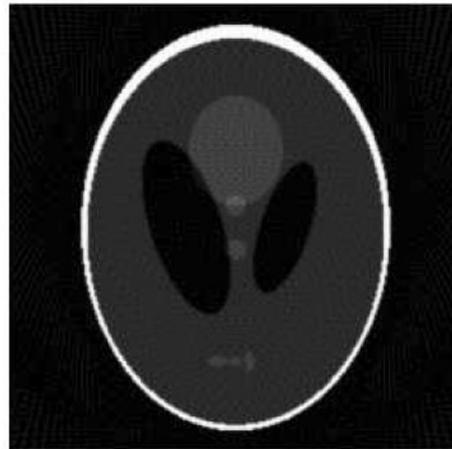




I1



I2



I3

Фантом Шеппа-Логана, восстановленный по разному числу проекций



Контрольные вопросы

1. В чем может проявляться неполнота данных в задаче реконструкции томографических изображений?
2. Какого объема данных достаточно для реконструкции изображения, описываемого функцией с компактным носителем?
3. Какие проблемы возникают при реконструкции изображений по проекциям из узкого диапазона углов обзора?
4. В чем заключается парадокс вычислительной томографии?



Решение парадокса.

Пусть F_U – множество всех вероятностных плотностей с компактным носителем в $U = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$$\phi_\sigma(x, y) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/(2\sigma^2)),$$

$f * \phi_\sigma$ и $g * \phi_\sigma$ ($f, g \in F_U$) – свертки ϕ_σ с f и g .

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$ – натуральное число, и существует $N = 2n$ направлений $\theta_1, \dots, \theta_N$ на плоскости R^2 таких, что проекции плотностей f и g ($f, g \in F_U$) по прямым в направлениях θ_j ($j = 1, \dots, N$) совпадают, тогда

$$\sup_{(x,y) \in R^2} |f * \phi_\sigma(x, y) - g * \phi_\sigma(x, y)| \leq \frac{1}{(\sqrt{\pi}\sigma^{n+2} 2^{(3n-2)/2} \Gamma((n+1)/2))},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Векторы $\theta_1, \dots, \theta_N$ выбираются следующим образом:

$$\theta_j = (\nu_j, -1)/(\nu_j^2 + 1)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\theta_j = (1, \nu_{j-n})/(\nu_{j-n}^2 + 1)^{1/2}, \quad j = n + 1, \dots, 2n,$$

где $\nu_k = \cos(\pi(2k - 1)/(2n))$, $k = 1, \dots, n$.



Теорема 4. Пусть $f \in F_U$ – непрерывно дифференцируемая функция плотности. При выполнении условий предыдущей теоремы, имеем

$$\sup_{(x,y) \in R^2} |f(x,y) - g * \phi_\sigma(x,y)| \leq C_f \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma + \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma^{n+2} 2^{(3n-2)/2} \Gamma((n+1)/2))},$$

где

$$C_f = \sup_{(x,y) \in R^2} \|\text{grad} f(x,y)\|.$$

Для $\sigma(n) = n^{-1/2}$ получается неравенство

$$\sup_{(x,y) \in R^2} |f(x,y) - g * \phi_\sigma(x,y)| \leq \tilde{C} n^{-1/2},$$

где \tilde{C} зависит только от C_f .

Теорема 4 дает оценку равномерного расстояния между искомой f и ее реконструкцией, полученной по методу линейной регуляризации с помощью Гауссова окна.



Конечный набор проекций с погрешностями

Теорема 5. Пусть проекции от f и g ($f, g \in F_U$) по прямым в направлениях θ_j ($j = 1, \dots, N$), где θ_j те же, что и в теореме 3, отличаются не более чем на $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\sup_{s \in R} \left| \int_{L(\theta_j, s)} f(x, y) dl - \int_{L(\theta_j, s)} g(x, y) dl \right| \leq \varepsilon, \quad j = 1 \dots N,$$

где интеграл берется вдоль прямой $L(\theta_j, s)$ с направляющим вектором θ_j , сдвинутой относительно начала координат на величину s , тогда

$$\sup_{(x, y) \in R^2} |f * \phi_\sigma(x, y) - g * \phi_\sigma(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{\pi \sigma^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3 n}.$$



Теорема 6. Пусть $f \in F_U$ – непрерывно дифференцируемая функция плотности. При выполнении условий предыдущей теоремы, имеем

$$\sup_{(x,y) \in R^2} |f(x, y) - g * \phi_\sigma(x, y)| \leq C_f \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma + \frac{\varepsilon}{\pi \sigma^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^3 n},$$

где

$$C_f = \sup_{(x,y) \in R^2} \|\mathbf{grad} f(x, y)\|,$$

а σ – произвольное положительное число.

Если, например, взять $\sigma = \sqrt[3]{\varepsilon}$, а n порядка $O(\varepsilon^{-\frac{4}{3}})$, то

$$\sup_{(x,y) \in R^2} |f(x, y) - g * \phi_\sigma(x, y)| \leq C \varepsilon^{-\frac{1}{3}},$$

где C зависит от C_f .



Контрольные вопросы

1. Какими средствами решается парадокс вычислительной томографии?
2. Каковы достаточные требования к функции изображения для получения оценки точности реконструкции при использовании конечного числа проекций?
3. Как изменяется оценка точности реконструкции при наличии погрешностей в проекционных данных?
4. Каким нужно выбрать значение параметра окна, чтобы получить оценку точности реконструкции при наличии погрешностей в проекционных данных?
5. Почему функции изображения можно считать неотрицательными?



Неполные данные. Локальная реконструкция.

Воспользовавшись $Rf(\varphi + \pi, -s) = Rf(\varphi, s)$, запишем

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \widetilde{Rf}(\varphi, x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi,$$

где

$$\widetilde{Rf}(\varphi, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} Rf(\varphi, t) h(s - t) dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{i\omega t} d\omega.$$

Определим оператор обратного проецирования:

$$R^*[g](x, y) = \int_0^{2\pi} g(\varphi, x \cos \varphi + y \sin \varphi) d\varphi.$$

Оператор R^* является сопряженным к оператору R .

Определим оператор I^α (потенциал Рисса):

$$\widehat{I^\alpha[q]}(\omega) = |\omega|^{-\alpha} \widehat{q}(\omega).$$



Формулу обращения можно записать в следующем виде:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} R^* [I^{-1}[Rf]](x, y),$$

Эту формулу можно обобщить. Пусть функции $f(x, y)$ и $g(\varphi, s)$ ($(x, y) \in R^2$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $s \in R$) интегрируемы и имеют компактный носитель, тогда

$$f * R^*[g](x, y) = R^*[Rf * g](x, y),$$

где свертка в левой части осуществляется относительно двух переменных (x, y) , а свертка в правой части – относительно одной переменной s при каждом фиксированном φ .

Если выбрать функцию $g(\varphi, s)$ такой, что $R^*[g](x, y)$ «достаточно хорошо» приближает δ -функцию, то можно получить хорошую аппроксимацию для функции $f(x, y)$.



Поясним причину невозможности локального обращения преобразования Радона.

Обозначим $G(x, y) = R^*[g](x, y)$.

По формуле обращения

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} R^* [I^{-1}[RG]](x, y).$$

Следовательно,

$$g(\varphi, s) = \frac{1}{4\pi} I^{-1}[RG](\varphi, s).$$

По определению оператора I^{-1} и теореме о центральном сечении $g(\varphi, s)$ удовлетворяет соотношению

$$\hat{g}(\varphi, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \hat{G}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi).$$

Для локального обращения преобразования Радона с использованием проекций только по тем прямым, которые проходят вблизи точек реконструкции было бы достаточно, чтобы обе функции – $g(\varphi, s)$ и $G(x, y)$ – имели компактный носитель.



В этом случае можно было бы выбрать положительные числа a' и a ($a' > a$) такие, что

$$\text{supp}(G) \subseteq \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a' - a\}$$

и

$$\text{supp}(g) \subseteq [-a' + a, a' - a] \text{ для всех } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Это позволило бы точно восстановить функцию $f * G(x, y)$ для $\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$, используя $Rf(\varphi, s)$ только при $s \in [-a', a']$.

Предположив, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) dx dy = 1,$$

и положив $G_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{-2} G(x/\varepsilon, y/\varepsilon)$, можно было бы аппроксимировать $f(x, y)$ при $\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$ сверткой $f * G_\varepsilon(x, y)$ сколь угодно точно, выбирая соответствующее $\varepsilon > 0$.



Однако $g(\varphi, s)$ и $G(x, y)$ не могут одновременно иметь компактный носитель.

Пусть, например, $G(x, y)$ имеет компактный носитель.

Тогда $\widehat{G}(\omega_1, \omega_2)$ можно аналитически продолжить до целой функции в C^2 , поэтому для любого $\varphi \in [0, 2\pi)$ функция $\widehat{G}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ – сужение целой функции на R .

Для того чтобы функция $g(\varphi, s)$ имела компактный носитель, необходимо, чтобы функция $|\omega| \widehat{G}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ также была сужением целой функции на R . Но это невозможно, так как предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) dx dy = 2\pi \widehat{G}(0, 0) = 1,$$

а производная функции $|\omega|$ разрывна в точке $\omega = 0$.

Замечание Преобразование Радона можно ввести в пространствах размерности $d \geq 2$. При этом оказывается, что когда d четно, задача реконструкции не локальна, а когда d нечетно, локальная реконструкция возможна.



Хотя компактность носителя функции $g(\varphi, s)$ обеспечить нельзя, можно обеспечить «достаточно» быстрое убывание $g(\varphi, s)$ на бесконечности.

Нужно потребовать, чтобы функция $|\omega| \widehat{G}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ была как можно более гладкой.

Поскольку $|\omega| \widehat{G}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$ бесконечно дифференцируема везде за исключением точки $\omega = 0$, для обеспечения желаемой гладкости необходимо, чтобы $\widehat{G}(\omega_1, \omega_2)$ имела ноль достаточно высокого порядка в точке $(0, 0)$.

Это означает наличие у $G(x, y)$ достаточно большого числа нулевых моментов. И самое большее, на что можно надеяться, это «почти» локально восстановить $f * G(x, y)$.

При соответствующем выборе $G(x, y)$ фактически получается вейвлет-преобразование функции $f(x, y)$.



Контрольные вопросы

1. Дать определение оператора обратного проецирования.
2. Дать определение оператора Рисса.
3. Записать формулу обращения преобразования Радона в операторном виде.
4. По какой причине преобразование Радона не допускает локального обращения?
5. Какую роль играют нулевые моменты в задаче локальной реконструкции мелких деталей изображения?



Вейвлет-преобразование

Пусть вейвлет-функция $\Psi(x, y)$ имеет круговую симметрию, тогда для ее преобразование Фурье:

$$\widehat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) = \eta(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}).$$

Условие допустимости:

$$C_\Psi = (2\pi)^2 \int_0^\infty |\eta(a)|^2 \frac{da}{a} < \infty.$$

Вейвлет-преобразование функции $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$W_\Psi f(a, b_1, b_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \Psi_{a, b_1, b_2}(x, y) dx dy, \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}, a > 0,$$

где $\Psi_{a, b_1, b_2}(x, y) = \frac{1}{a} \Psi\left(\frac{x-b_1}{a}, \frac{y-b_2}{a}\right)$,

Формула обращения:

$$f(x, y) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\Psi f(a, b_1, b_2) \Psi_{a, b_1, b_2}(x, y) db_1 db_2 \frac{da}{a^3}.$$



Связь между вейвлет-преобразованием функции и вейвлет-преобразованиями ее проекций

Теорема 1. Пусть $\Psi(x, y)$ – допустимая вещественная вейвлет-функция, имеющая круговую симметрию и удовлетворяющая при некотором $C > 0$ условию

$$\left| \widehat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) \right| \leq C(1 + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})^{-2} \text{ при всех } (\omega_1, \omega_2) \in R^2.$$

Определим четную функцию $\rho(s) = \rho(\theta, s)$:

$$\widehat{\rho}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\omega| \widehat{\Psi}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

Тогда $\rho(s)$ – допустимая вейвлет-функция, и для любой функции $f(x, y) \in L^1(R^2) \cap L^2(R^2)$ с конечным носителем

$$W_{\Psi} f(a, b_1, b_2) = a^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_{\rho}[R_{\theta} f](a, b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) d\theta$$

при всех $a > 0, b_1, b_2 \in R$.



Теорема 2. Пусть $\rho(s)$ – допустимая четная вещественная вейвлет-функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\rho}(\omega)|^2}{\omega^3} d\omega < \infty.$$

Определим $\Psi(x, y)$ (имеющую круговую симметрию):

$$\hat{\Psi}(\omega_1, \omega_2) = 2\sqrt{2\pi} \frac{\hat{\rho}(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

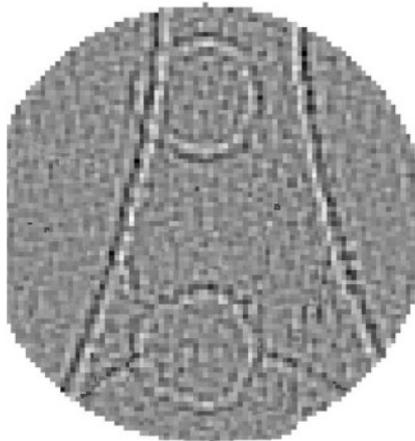
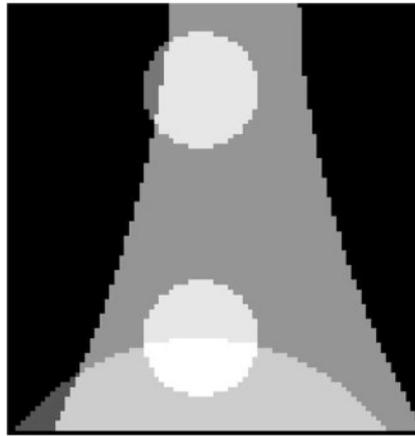
Тогда $\Psi(x, y)$ является допустимой вейвлет-функцией, и

$$W_{\Psi} f(a, b_1, b_2) = a^{-1/2} \int_0^{2\pi} W_{\rho}[R_{\theta} f](a, b_1 \cos \theta + b_2 \sin \theta) d\theta$$

при всех $a > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Для задач обработки изображений заранее выбирается $\Psi(x, y)$, обладающая подходящими свойствами, а затем рассматриваются свойства $\rho(s)$.

Для локализации нужна $\rho(s)$ с маленьким носителем и большим числом нулевых моментов. Тогда $\Psi(x, y)$ заметно отлична от нуля в области почти такого же радиуса, что и носитель $\rho(s)$. Следовательно, вейвлет-преобразование $f(x, y)$ можно вычислить локально, используя локальную информацию о $Rf(\varphi, s)$. 



Вверху – область фантома Шеппа-Логана, внизу – та же область, локально восстановленная



Степень локализации зависит от скорости убывания оператора I^{-1} от вейвлет-функции.

Теорема 3. Пусть функция $h(s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $h(s)$ имеет компактный носитель,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} s^j h(s) ds = 0$ при $j = 0, \dots, m$ для некоторого $m \geq 0$,
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \omega^j \widehat{h}^{(k)}(\omega) \right| d\omega < \infty$ при $j = 0, 1$, и $k = 0, \dots, m + 1$,

где $\widehat{h}^{(k)}(\omega)$ – k -я производная $\widehat{h}(\omega)$, и

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \omega^j \widehat{h}^{(k)}(\omega) \right|^2 d\omega < \infty$ при $j = 0, 1$, и $k = 0, \dots, m + 1$,

тогда

$$I^{-1}[h](s) = o(|s|^{-(m+1)}) \text{ при } |s| \rightarrow \infty,$$

и

$$s^{m+1} I^{-1}[h](s) \in L^2(\mathbb{R}).$$



Контрольные вопросы

1. Дать определение 2-мерного вейвлет-преобразования.
2. Как связаны между собой вейвлет-преобразование функции изображения и вейвлет-преобразования ее проекций?
3. В каких ситуациях вейвлет-функция выбирается для проекций, и в каких для функции изображения?
4. От чего зависит степень локализации задачи локальной реконструкции участка изображения?



Кратномасштабная реконструкция

Пусть $\varphi(x)$ – одномерная масштабирующая функция, а $\psi(x)$ – одномерная вейвлет-функция. Определим

$$\Phi_{j,k_1,k_2}(x,y) = 2^j \varphi(2^j x - k_1) \varphi(2^j y - k_2),$$

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^{[1]}(x,y) = 2^j \varphi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2),$$

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^{[2]}(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k_1) \varphi(2^j y - k_2),$$

$$\Psi_{j,k_1,k_2}^{[3]}(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k_1) \psi(2^j y - k_2).$$

При любом $j_0 \in Z$

$$\left\{ \Phi_{j_0,k_1,k_2}, \Psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \right\}, \quad j, k_1, k_2 \in Z, j \geq j_0, \lambda = 1, 2, 3,$$

является ортонормированным базисом в $L^2(R^2)$.

Также ортонормированным базисом в $L^2(R^2)$ является

$$\left\{ \Psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \right\}, \quad j, k_1, k_2 \in Z, \lambda = 1, 2, 3.$$



Разложение функции f по «однородному» базису:

$$f = \sum_{\substack{j, k_1, k_2 \in Z, \\ \lambda = 1, 2, 3}} \langle f, \Psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle \Psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]}.$$

Вейвлет-вейглет-разложение f :

$$f = \sum_{\substack{j, k_1, k_2 \in Z, \\ \lambda = 1, 2, 3}} \beta_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \langle Rf, \xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle \Psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]},$$

где $\beta_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} = 2^{j/2}$, а $\xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]}(\varphi, s) = \frac{2^{-j/2}}{4\pi} I^{-1}[R\Psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]}](\varphi, s)$,

т.е. $\langle f, \Psi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle = 2^{j/2} \langle Rf, \xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \rangle$.

Эта формула служит основой для метода реконструкции.

Лемма. Пусть $A > 0$, $a > 1/2$ и $b > 3/2$ такие, что

$$|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq A(1 + |\omega|^2)^{-b/2} \text{ и } |\widehat{\psi}(\omega)| \leq A|\omega|^a(1 + |\omega|^2)^{-(b+a)/2}$$

для всех $\omega \in R$, тогда $\left\{ \xi_{j, k_1, k_2}^{[\lambda]} \right\}$, $j, k_1, k_2 \in Z$, $\lambda = 1, 2, 3$, образует устойчивый базис в $L^2(T)$, где $T = [0, 2\pi] \times R$.



Используя теорему о центральном сечении,

$$\xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}(\varphi, s) = \frac{2^{-j/2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \widehat{\Psi}_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{is\omega} d\omega.$$

Далее учитывая, что

$$\widehat{\Psi}_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}(\omega_1, \omega_2) = 2^{-j} e^{-i2^{-j}(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)} \widehat{\Psi}_{0,0,0}^{[\lambda]}(2^{-j}\omega_1, 2^{-j}\omega_2),$$

получаем

$$\xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}(\varphi, s) = 2^{j/2} \xi_{0,0,0}^{[\lambda]}(\varphi, 2^j s - k_1 \cos \varphi - k_2 \sin \varphi).$$

Таким образом, $\xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}$ представляют собой «искривленные» сжатия базовых функций $\xi_{0,0,0}^{[\lambda]}$, и при увеличении j они «концентрируются» около некоторых синусоид в плоскости $\{\varphi, s\}$.

Эти свойства преобразования Радона позволяют провести аналогию между ним и однородными линейными преобразованиями. В частности, из вида $\beta_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = 2^{j/2}$ следует, что степень некорректности задачи обращения преобразования Радона равна $1/2$.



Если $\psi(x)$ имеет компактный носитель и достаточно большое число нулевых моментов, то $\xi_{0,0,0}^{[\lambda]}(\varphi, s)$, $\lambda = 1, 2, 3$, при каждом $\varphi \in [0, 2\pi]$ существенно отличны от нуля только в области примерно такого же радиуса, что и радиус носителя $\Psi_{0,0,0}^{[\lambda]}(x, y)$.

При достаточно больших j коэффициенты в разложении можно вычислить достаточно точно, используя значения $Rf(\varphi, s)$ при $\varphi \in [0, 2\pi)$ и s из интервала радиуса $2^{-j}T$ с центром в точке $2^{-j}(k_1 \cos \varphi + k_2 \sin \varphi)$, где T – радиус области, в которой $\Psi_{0,0,0}^{[\lambda]}(x, y)$ отличны от нуля.

Эти значения $Rf(\varphi, s)$ – проекции $f(x, y)$ по прямым, проходящим в круге радиуса $2^{-j}T$ с центром в точке $(2^{-j}k_1, 2^{-j}k_2)$.

Для восстановления более мелких деталей изображения требуется более локальная информация, чем для восстановления крупных деталей. Степень локализации зависит от скорости убывания $I^{-1}[\Psi_{0,0,0}^{[\lambda]}](\varphi, s)$ по переменной s .



Статистические характеристики коэффициентов разложения

Проекционные данные:

$$Rf_e(\varphi_m, s_n) = Rf(\varphi_m, s_n) + z_{m,n}, \\ m = 0, \dots, N - 1, n = 1, \dots, N \quad (N = 2^J), \quad z_{m,n} \sim N(0, \sigma^2).$$

Коэффициенты в дискретном вейвлет-вейглет-разложении:

$$X_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = \mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} + \varepsilon_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]},$$

где

$$\mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} = 2^J \langle f, \Psi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle = 2^{J+j/2} \langle Rf, \xi_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \rangle,$$

а

$$\varepsilon_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \sim N(0, \sigma_{\lambda,j}^2), \quad \sigma_{\lambda,j}^2 = 4\pi 2^j \sigma^2 \left\| \xi_{0,0,0}^{[\lambda]} \right\|^2$$

Дисперсия растет со скоростью 2^j и в силу однородности преобразования Радона не зависит от k_1 и k_2 .



Регуляризация с помощью пороговой обработки

Жесткая пороговая обработка:

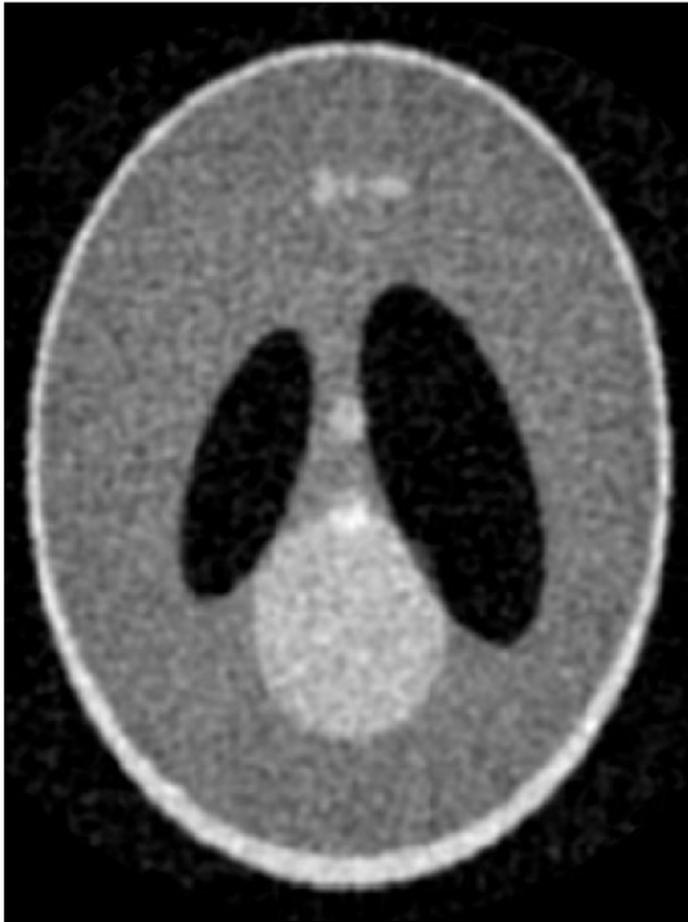
$$d_{T_{\lambda,j}}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > T_{\lambda,j} \\ 0, & \text{если } |x| \leq T_{\lambda,j}, \end{cases}$$

Мягкая пороговая обработка:

$$d_{T_{\lambda,j}}(x) = \begin{cases} x - T_{\lambda,j}, & \text{если } x > T_{\lambda,j} \\ x + T_{\lambda,j}, & \text{если } x < -T_{\lambda,j} \\ 0, & \text{если } |x| \leq T_{\lambda,j}. \end{cases}$$

Универсальный порог $T_{\lambda,j} = \sigma_{\lambda,j} \sqrt{2 \ln 2^{2j}}$.





Примеры реконструкции изображения фантома Шеппа-Логана по зашумленным проекциям.



Контрольные вопросы

1. Описать кратномасштабный анализ, используемый в задаче реконструкции изображений по проекциям.
2. Чему равны коэффициенты вейвлет-вейглет-разложения при реконструкции изображений по проекциям?
3. Какими особенностями обладают вейглеты в задаче реконструкции изображений по проекциям?
4. Какова степень некорректности задачи реконструкции изображений по проекциям?
5. Каким образом решается задача локальной реконструкции деталей изображения при помощи метода вейвлет-вейглет-разложения?
6. Какими особенностями обладают дисперсии коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения при наличии шума в проекционных данных?
7. Какими особенностями обладают пороговые значения при использовании метода пороговой обработки для регуляризации задачи реконструкции изображений по проекциям?



Основные направления использования рассмотренных в курсе методов и подходов

1. Методы вероятностного анализа выборок сигналов/изображений большого объема позволяют строить вероятностные модели, анализировать и прогнозировать течение реальных процессов и явлений, таких как Интернет-трафик, телекоммуникационный трафик, изменение финансовых индексов, турбулентная плазма и прочие.
2. Методы Фурье-анализа используются при анализе/обработке стационарных сигналов/изображений и позволяют осуществлять спектральный анализ, линейную фильтрацию, выделение в сигналах/изображениях диапазонов частот, подавление шума и сжатие больших массивов данных.



3. Вейвлет-анализ дает возможность анализировать эволюцию спектральных характеристик нестационарных сигналов/изображений и предоставляет эффективные инструменты для подавления шумов, сжатия больших объемов данных и локализации особенностей.

4. При решении обратных статистических задач, таких как обращение линейных операторов, применяемых в оптике, радиотехнике, компьютерной графике и других областях, методы вейвлет-анализа дают возможность учитывать не только вид оператора, но и свойства анализируемых сигналов/изображений, такие как разная степень гладкости на разных временных/пространственных участках.

5. Рассмотренные в курсе методы реконструкции томографических изображений позволяют решать такие задачи, как локальная реконструкция участков изображений, линейная и нелинейная регуляризация и оценка качества восстановленных изображений.

